

Anhang A

Spiegelungen

Begriffe, mit denen wir rechnen wollen, müssen aus zwei Gründen, soweit es geht, von anschaulichen Bezügen befreit werden. Zum einen gefährdet die Anschauung mit ihren mannigfaltigen Assoziationen den logisch fehlerfreien Schluß, zum anderen erreicht man Gedankengebäude, die auf physikalisch ganz verschiedene Gegenstände passen können. Paradoxerweise erweitert also die Abstraktion von der Anschauung die Anwendungsmöglichkeiten.

Die unbewußten Assoziationen der Anschauung sind es, die uns Dinge für selbstverständlich halten lassen, die in einen logischen Schluß nicht eingehen dürfen. Gerade die Geschichte der Einsteinschen Relativitätstheorie hat eindrücklich gezeigt, daß man sich von dem Vorurteil eines mechanischen Äthers als Träger des Lichts befreien muß, um zu einem klaren Verständnis und zu richtigen Vorhersagen zu gelangen. Wenn wir mit unserem Gedankengebäude in Bereiche vordringen wollen, die jenseits der Maße der täglichen Lebens liegen, gibt es viele Dinge, die nicht im Gepäck sein dürfen. Man findet aber immer erst nach und nach heraus, welche es sind. Die axiomatische Methode versucht von vornherein, blinde Passagiere im Reisegepäck zu vermeiden, indem sie die anschauliche Begriffsbestimmung durch eine implizite ersetzt. Implizit heißt hier, daß man einen Satz von Eigenschaften benennt, die ein Gegenstand haben soll, und nun die Erforschung des Gegenstandes auf diese Eigenschaften allein stützt. Die Abstraktion von der Anschauung verbietet aber nicht, sich an der Anschauung oder gar am physikalischen Experiment zu orientieren. Wir haben die Kugel und auch das Hyperboloid benutzt, um diese Orientierung jenseits der euklidischen Geometrie zu finden.

Wir suchen nach der Darstellung von Operationen, die uns die Gleichheit von Gegenständen unabhängig von Lage und Orientierung feststellen lassen. Wir nennen diese Operationen Bewegungen, und da wir vom konkreten Ablauf abstrahieren wollen, müssen wir voraussetzen, daß sich Bewegungen wieder zu Bewegungen zusammensetzen. Das ist das Gegenstück zur Transitivität logischer Äquivalenzrelationen. Auch deren Symmetrie findet hier ihren Ausdruck: Da es gleich sein soll, welchen Gegenstand wir bewegen und welcher die Ziellage bestimmt, muß die Umkehr ei-

ner Bewegung wieder eine Bewegung sein. In einer Folge von Bewegungen soll auch beliebig zusammengefaßt werden können. Die Bewegungen sollten also eine *Gruppe* bilden, die *Bewegungsgruppe*. Das heißt:

1. Die Zusammensetzung zweier Bewegungen ist wieder eine Bewegung: Sind zwei Figuren einer dritten kongruent, so sind sie auch untereinander kongruent.
2. Die einzelnen Bewegungen einer Kette können beliebig zusammengefaßt werden, solange ihre Reihenfolge dabei nicht geändert wird.
3. Die Bewegung in den Anfangszustand zurück zählen wir auch, sie ist dann die sogenannte inverse Bewegung. Setzen wir sie mit der vorangegangenen Bewegung zusammen, ergibt sich der Ausgangszustand.
4. Das einfache Belassen des Zustands muß deshalb auch noch unter die Bewegungen gerechnet werden. Diese „Bewegung“, bei der eigentlich nichts geschieht, ist die Eins unserer Bewegungsgruppe. Setzen wir eine beliebige Bewegung mit dieser Eins zusammen, ergibt sich wieder die erste Bewegung.

Gewöhnlich denken wir uns Bewegung anschaulich als Operation in einem Raum. Man kann aber eine jede Gruppe als Bewegungsgruppe auffassen, wenn man die Bewegung ins Auge faßt, die die Gruppe auf sich selbst erzeugen kann. Das wichtigste Beispiel dafür sind die Transformationen. Als Transformation mit dem Gruppenelement a bezeichnen wir die Bewegung, die jedes Gruppenelement g auf $\mathcal{T}_a[g] = a^{-1}ga$ abbildet. Diese Operation bewahrt die volle Struktur der Gruppe, ist in anschaulichem Sinne also eine Bewegung.

Was im Einzelnen bewegt wird, davon soll unsere Rechnung und unsere Definition unberührt bleiben. Aus der Sicht der Mathematik beleuchtet und entfaltet die Rechnung die abstrakte Struktur der Bewegungsgruppe. *Sie* bestimmt, was kongruent ist und was nicht kongruent ist, d.h., sie bestimmt die Geometrie. Die Anwendung auf ein physikalisches Objekt erfordert einerseits die Interpretation dieser Struktur und andererseits ihre experimentelle Sicherung, und beide sind von charakteristischen Unsicherheiten betroffen [72].

Merkwürdigerweise kann man nun den Begriff der Bewegung auf den der *Spiegelung* (an Geraden der Ebene, an Ebenen im Raum) reduzieren, die selbst keine eigentliche Bewegung ist, d.h., sie kann nicht durch die physische Bewegung eines Objekts verwirklicht werden¹. Dennoch ist diese Reduktion möglich. Mit ihr wird die Spiegelung zu einem Grundbegriff der metrischen Geometrie. Spiegelung erlaubt den Transport von Strecken und Winkeln und ihren Vergleich unabhängig von der Lage der Gegenstände, die verglichen werden sollen.

¹Erweitert man die Ebene bzw. den Raum um eine Dimension, dann wird aus der Geraden Spiegelung bzw. der Ebenenspiegelung eine Umklappung, d.h. eine Drehung durch die zusätzliche Dimension. Die Spiegelung an einer Geraden der Ebene wird so eingebettet in eine Umklappung des Raums an der Geraden, die eine (involutorische) Drehung um den gestreckten Winkel ist.

1. Ist $S[A]$ das Spiegelbild des Punktes A , dann ist der Spiegel der geometrische Ort aller Punkte, die von A und seinem Spiegelbild $S[A]$ gleich weit entfernt sind.
2. Ist $S[A]$ das Spiegelbild des Punktes A und Q ein beliebiger Punkt auf dem Spiegel, dann bildet der Spiegel mit den Geraden QA und $QS[A]$ gleiche Winkel.

Das scheint unmittelbar klar, und so werden wir unsere Abstraktion auch ausgestalten. Merkwürdigerweise gestattet der normale Spiegel ein solch operatives Vorgehen gerade nicht, denn wir vermessen ein Bild im Spiegel zunächst mit dem Spiegelbild des Maßstabs und nicht mit dem Maßstab selbst. Erst die halbdurchlässigen Spiegel gestatten es, das (virtuelle) Spiegelbild mit einem reellen Maßstab zu vermessen. Dann wird auch deutlich, daß eine wiederholte Spiegelung in die Ausgangslage zurückführt. Dies ist die entscheidende Eigenschaft, die im axiomatischen Zugang *definiert*, was eine Spiegelung ist [4]. Die abstrakte Definition der Spiegelung behandelt zunächst nur die algebraischen Relationen. Wir bereiten den Anschluß an die Begriffswelt der Geometrie vor, indem wir beschreiben, welche algebraischen Ausdrücke Punkte und Geraden sein sollen.

Die elementare Spiegelung ist Spiegelung an einer Geraden, und zu jeder Geraden gibt es eine Spiegelung. Wir werden also zumindest einen Teil \mathcal{S} der Spiegelungen als Repräsentanten von Geraden ansehen können. Dieser Teil \mathcal{S} wird als Erzeugendensystem gewählt. Die Elemente der Bewegungsgruppe sind Produkte solcher Spiegelungen. Auch ein Punkt ist als involutorische Abbildung bestimmbar. Er ist das Produkt aus zwei Geraden, wenn dieses Produkt selbst wieder eine Spiegelung ist. In der euklidischen Ebene sehen wir sofort, daß die konsekutive Spiegelung an zwei aufeinander senkrechten Geraden eine Drehung um π am Schnittpunkt darstellt (Abb. A.1). – Es gilt ein wichtiger Satz, daß alle Produkte von *mehr* als drei Erzeugenden als Produkt *höchstens* dreier Erzeugender dargestellt werden kann. Jedes Produkt aus einer geraden Anzahl ist ein Produkt zweier Geraden.

Als Gegenstand der Geometrie bestimmen wir nach diesen Einsichten also eine Bewegungsgruppe \mathcal{G} , die durch involutorische Elemente (Spiegelungen) erzeugt werden soll. Dieses Erzeugendensystem bezeichnen wir mit \mathcal{S} . Es soll sich bei Transformationen nicht ändern (da wir im Sinn haben, die Erzeugenden als Geraden anzusehen, und Geraden auch bei Transformation Geraden bleiben müssen):

$$g \in \mathcal{S}, \quad a \in \mathcal{G} : \rightarrow a^{-1}ga \in \mathcal{S}.$$

Die Elemente von \mathcal{S} können wir nun als die Geraden der Geometrie ansehen (genauer sind es Spiegelungen an den Geraden) und werden sie deshalb mit kleinen Buchstaben bezeichnen.

Aufbauend auf dem Begriff der Geraden, definieren wir nun auf algebraischem Wege den *Punkt*: Diejenigen Spiegelungen aus \mathcal{G} , die sich als Produkte zweier Elemente von \mathcal{S} darstellen lassen, nennen wir Punkte (genauer sind es Spiegelungen an den Punkten) und bezeichnen sie mit großen Buchstaben. Die Anschauung sagt

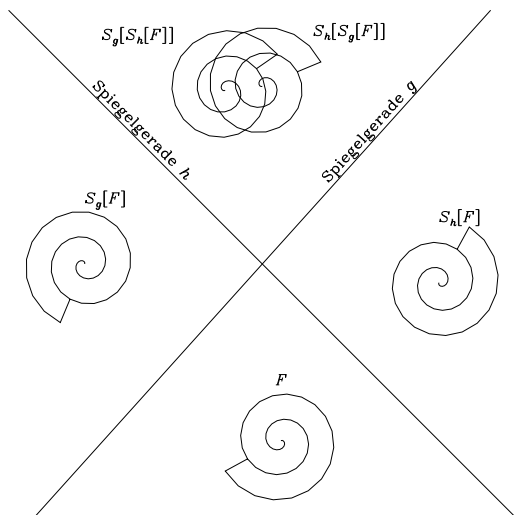


Abbildung A.1: Der Punkt als Produkt zweier Geraden

Stehen in der euklidischen Ebene zwei Geraden aufeinander senkrecht, werden bei konsekutiven Spiegelungen die Bilder um den Schnittpunkt gedreht, wobei die Iteration der Bewegung sofort wieder in die Ausgangslage zurückführt. Der Schnittpunkt ist also wieder eine Spiegelung, gehört aber nicht zum Erzeugendensystem. Das Produkt der Spiegelungen an zwei nicht aufeinander senkrecht stehenden Geraden ist keine Spiegelung. In unserem Bild fallen $S_h[S_g[F]]$ und $S_g[S_h[F]]$ in dem Maße auseinander, wie h und g von der lotrechten Lage abweichen.

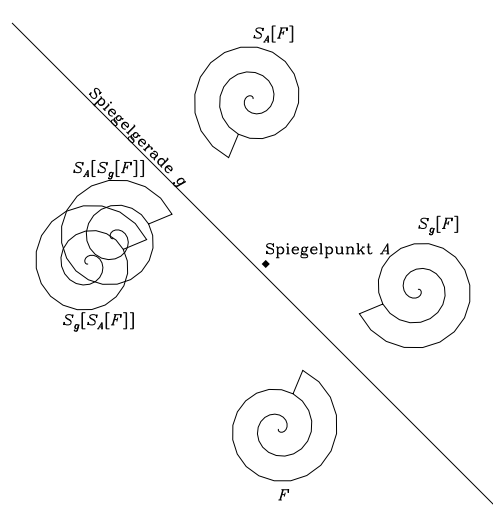


Abbildung A.2: Ein Punkt auf einer Geraden

Nur wenn der Drehpunkt auf der spiegelnden Geraden liegt, können wir erwarten, daß es gleichgültig ist, ob die Drehung um einen gestreckten Winkel vor oder nach der Spiegelung an der Geraden ausgeführt wird. In unserem Bild fallen $S_A[S_g[F]]$ und $S_g[S_A[F]]$ in dem Maße auseinander, wie A und g von Inzidenz entfernt sind. Liegt A auf g , fallen $S_A[S_g[F]]$ und $S_g[S_A[F]]$ zusammen.

uns, daß das Produkt zweier Spiegelungen immer eine Drehung ist. Eine Drehung ist aber auch involutorisch, wenn der Drehwinkel der gestreckte Winkel ist. Die beiden Geraden bestimmen also einen Punkt zunächst nur, wenn sie *lotrecht* sind. Wir definieren damit das Senkrechtstehen überhaupt: Zwei Geraden g, h sind genau dann lotrecht zueinander, $g \perp h$, wenn ihr Produkt involutorisch ist, $ghgh = 1$. Wie wir erwarten müssen, folgt aus $h = h^{-1}$, $g = g^{-1}$ und $hghg = 1$ eben $h = ghg = g^{-1}hg$: Die Gerade h fällt mit ihrem Spiegelbild $S_g[h] = g^{-1}hg$ an g zusammen. Das entspricht unserer von euklidischen Verhältnissen geprägten Anschauung. Verbinden wir einen Punkt A mit seinem Spiegelbild $g^{-1}Ag = gAg$, ist die Verbindungsgerade $h = (A, gAg)$ auf g senkrecht, denn das Spiegelbild ghg von h verbindet die gleichen Punkte und fällt daher mit h zusammen (wenn A und gAg verschieden sind). Genau dann, wenn A und $g^{-1}Ag$ gleich sind, liegt A auf g . Dies heißt aber nichts anderes, als daß $gA = Ag$, oder gA wieder eine Spiegelung h ist, die selbst auf g senkrecht

Das Produkt der Spiegelungen an drei Geraden, die im Bündel liegen, ist wieder eine Geradenspiegelung, deren Gerade im gleichen Bündel liegt, $S_c S_a S_b = S_d$.

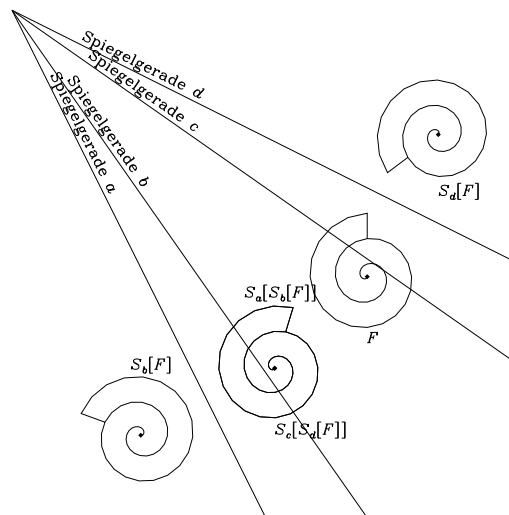


Abbildung A.3: Spiegelbildliche Lage von Geraden

steht ($ghg = ggAg = Ag = gA = h$). Nur wenn der Drehpunkt auf der spiegelnden Geraden liegt, können wir erwarten, daß es gleichgültig ist, ob die Drehung um einen gestreckten Winkel vor oder nach der Spiegelung an der Geraden ausgeführt wird (Abb. A.2).

Wenn wir an die Behandlung von Geraden denken, die sich im Endlichen nicht schneiden, verzichten wir bei den Schnittpunktsätzen auf den Schnittpunkt und definieren statt dessen ein *Bündel*: Geraden liegen im Bündel (man nennt sie dann auch *konkurrent*), wenn sie entweder einen gemeinsamen Punkt oder ein gemeinsames Lot haben². Wenn das Produkt dreier Geraden, die im Bündel liegen, wieder eine Gerade ist, können wir den Mittelsenkrehtensatz, der so wichtig für die Konsistenz der Interpretation des Längenvergleichs ist, bereits ableiten. Wir fordern deshalb als Axiom: Liegen drei Geraden im Bündel, ist ihr Produkt wieder eine Gerade: $abc = d$, $ab = dc$. In diesem Falle sprechen wir auch davon, daß b, d in Bezug auf a, c spiegelbildlich liegen (Abb. A.3). Ist $ab = da$, ist a die Gerade, an der b in d gespiegelt wird ($b = a^{-1}da = ada$). Die Geometrie wird trivial, wenn alle Geraden aufeinander lotrecht stehen, wir wollen also auch die Forderung erfüllt sehen, daß es Geraden gibt, die auf den beiden Geraden eines lotrechten Paares *nicht* senkrecht stehen.

Es reicht aus, fünf Axiome der Spiegelung zu wählen, um das Fundament für Bau der Geometrie zu legen [4].

1. Zu zwei Punkten A, B soll es stets eine verbindende Gerade $g = (A, B)$ (d.h., $AgAg = 1$ und $BgBg = 1$, kurz $A, B \mid g$) geben.

²Die Anschauung sieht hier gern sofort einen Punkt (den Träger des Bündels, durch den die Geraden gehen), aber im allgemeinen müßte dieser Punkt nicht zur Bewegungsgruppe gehören, sondern nur in der projektiven Erweiterung sichtbar sein.

2. Werden zwei Punkte von zwei Geraden verbunden, $A, B \mid g, h$, dann sollen entweder die beiden Punkte oder die beiden Geraden zusammenfallen.
3. Gilt $a, b, c \mid A$, so soll ein d mit $abc = d$ existieren.
4. Gilt $a, b, c \mid g$, so soll ein d mit $abc = d$ existieren.
5. Es soll drei Geraden g, h, j geben, von denen die ersten beiden lotrecht zueinander sind ($g \mid h$), die dritte aber auf keiner der beiden ersten lotrecht ist (weder $g \mid j$ noch $h \mid j$ treffen zu).

Diese Axiome sichern die Existenz einer eindeutigen Verbindungsgeraden zweier Punkte, die Eindeutigkeit eines Schnittpunkts und die Existenz von Spiegelgeraden für drei im Büschel liegende Geraden. Schließlich ist auch die Reichhaltigkeit gegeben.

Wir wollen nun verdeutlichen, wie man mit solchen Spiegelungen rechnen kann. Wir werden dies am Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und am Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks zeigen. Der Satz vom Schnitt der Mittelsenkrechten sichert die Konsistenz der Vorstellung, daß Spiegelungen Längen übertragen. In einer hypothetischen Konstruktion von Quasispiegelungen, für die der Mittelsenkrechtensatz nicht zutrifft, kann die Interpretation, daß die Spiegelungen längentreu sind und dadurch den Längenvergleich ermöglichen, nicht konsistent sein.

Zunächst zeigen wir, wie man eine Gerade g konstruiert, die mit zwei anderen, m_a und m_c , im Büschel liegt und durch einen Punkt B geht, der nicht auf diesen beiden Geraden liegt (Abb. A.4). Dazu spiegeln wir B an m_a ($m_a B m_a = C$) und m_c ($m_c B m_c = A$). Die Verbindungen $a = (B, C)$ und $c = (B, A)$ sind nun senkrecht zu m_a bzw. m_c und definieren die Punkte $M_a = am_a$ und $M_c = cm_c$. Wir spiegeln nun B an der Verbindungsgeraden $d = (M_a, M_c)$ und konstruieren so das Lot $e = (B, dBd)$ aus B auf d . Die drei Geraden a, e, c gehen alle durch B , ihr Produkt $g = aec$ ist also eine Gerade, die natürlich auch durch B geht. Wir zeigen, daß sie mit m_a und m_c im Büschel liegt:

$$m_a g m_c = m_a a e c m_c = M_a e M_c = d d M_a e M_c = d M_a d e M_c = d M_a e d M_c .$$

Dieses Produkt ist wieder eine Gerade, $d M_a e d M_c = h$, weil $d M_a, e$ und $d M_c$ alle senkrecht auf der gleichen Geraden d stehen, also im Büschel liegen und ihr Produkt eine Gerade h sein muß. Damit erfüllt g das Konstruktionsziel. – Nehmen wir nun an, wir haben im Dreieck $\triangle ABC$ die Mittelsenkrechten m_a und m_c konstruiert (Abb. A.5). Dann gilt definitionsgemäß

$$m_c A = B m_c , \quad C m_a = m_a B .$$

Wir ziehen nun die Gerade g durch B , die mit den beiden Mittelsenkrechten im Büschel liegt (d.h. im einfachsten Falle, die durch den gemeinsamen Punkt der beiden

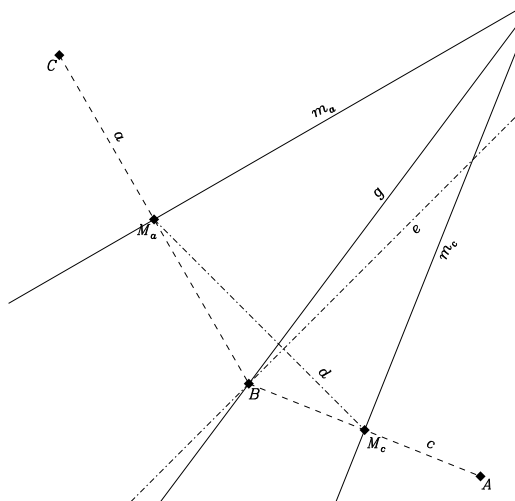


Abbildung A.4: Die Verbindung mit einem virtuellen Büchelträger

Zwei Geraden m_a und m_c sind gegeben. Gesucht ist eine Gerade g , die mit den beiden im Büchel liegt und durch den Punkt B geht. Wir bestimmen zuerst die Spiegelpunkte $A = m_c B m_c$ und $C = m_a B m_a$ und dann die Mittelpunkte $M_a = am_a$ und $M_c = cm_c$, die wir durch d verbinden. Auf diese fallen wir aus B das Lot e und finden g in spiegelbildlicher Lage zu e , wenn wir uns auf die Verbindungen $a = [B, C]$ und $c = [B, A]$ beziehen.

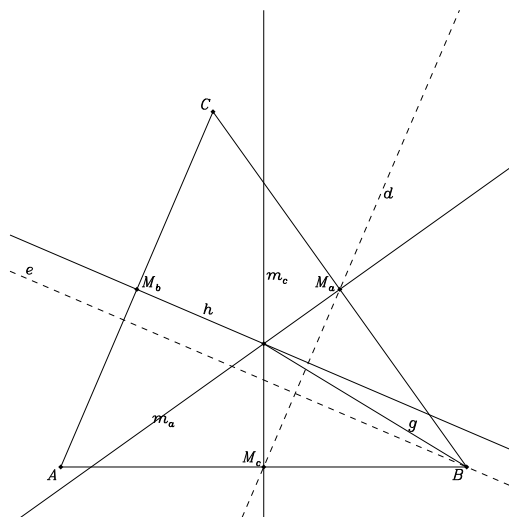


Abbildung A.5: Der Mittelsenkrechtensatz. II.

Zu den beiden Mittelsenkrechten m_c und m_a ziehen wir die Gerade g durch B , die mit den beiden Mittelsenkrechten im Büchel liegt. Das Produkt der drei Geraden m_a , g und m_c ist per Axiom wieder eine Gerade h . Man kann zeigen, daß diese Gerade die Mittelsenkrechte von A und C ist.

Mittelsenkrechten geht). Dann gilt einerseits $gB = Bg$, andererseits ist das Produkt der drei Geraden m_a , g und m_c per Axiom wieder eine Gerade h :

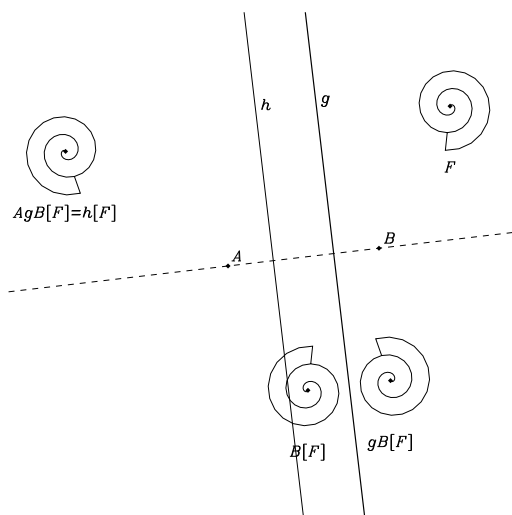
$$m_a g m_c = h . \quad (\text{A.1})$$

Diese Gerade ist aber die Mittelsenkrechte von A und C :

$$hA = m_a g m_c A = m_a g B m_c = m_a B g m_c = C m_a g m_c = Ch .$$

Damit ist der Mittelsenkrechtensatz bewiesen. Wir können auch umgekehrt mit dem Mittelsenkrechtensatz zeigen, daß das Produkt dreier im Büchel liegender Geraden wieder eine Gerade sein muß. Dazu verfolgen wir die Konstruktion einfach rückwärts.

Bevor wir zum Höhensatz kommen, zeigen wir noch, daß ein Produkt AgB aus zwei Punkten A und B und einer Geraden g genau dann eine Gerade h ist, wenn g lotrecht zu der Verbindung von A und B ist (Abb. A.6). Wir betrachten nur den nichttrivialen Fall, daß $A \neq B$. Auf der Verbindungsgeraden c errichten wir

Abbildung A.6: Das Produkt AgB

Steht die Gerade g auf der Verbindungslinie AB senkrecht, so ist das Produkt AgB der drei entsprechenden Spiegelungen wieder eine Geradenspiegelung h , wobei h in AB spiegelbildlich zu g liegt.

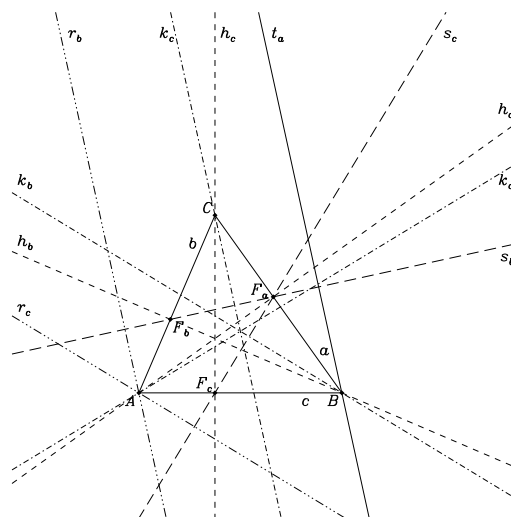


Abbildung A.7: Der Höhensatz. II.

Wir zeichnen in einem Dreieck A, B, C die Höhen h_a, h_b, h_c und ihre Fußpunkte F_a, F_b, F_c . Zu den Höhen zeichnen wir in den Ecken die spiegelbildlich liegenden Geraden $k_a = bh_a c$, $k_b = ch_b a$ und $k_c = ah_c b$. Wir spiegeln dann k_a an b ($r_b = bk_a b$) und an c ($r_c = ck_a c$), fällen auf beide Spiegelungen die Lote aus F_a ($s_b = (F_a, r_b)$ und $s_c = (F_a, r_c)$). Schließlich spiegeln wir k_b an a ($t_a = ak_b a$). Das Produkt $F_a k_b F_c = u$ ist eine Gerade, eben das Produkt $h_a h_b h_c$.

die beiden Lote $q = Ac$ und $r = Bc$. Ist nun AgB eine Gerade, so ist es auch $cAgBc = qgr$, und das geschieht genau dann, wenn q, g, r im Büschel liegen, d.h., wenn g ebenfalls auf c senkrecht steht. Das Produkt AgB ist damit ebenfalls auf c senkrecht. Ähnliches gilt für ein Produkt gAh . Ein solches Produkt ist genau dann wieder ein Punkt B , wenn g und h ein gemeinsames Lot c haben und der Punkt A auf diesem Lot liegt. – Nun können wir den Höhensatz (Abb. A.7) beweisen. In einem Dreieck A, B, C mit $a = (B, C)$, $b = (C, A)$, $c = (A, B)$ konstruieren wir die Höhen h_a, h_b, h_c als Verbindungslinien $h_a = (A, aAa)$, $h_b = (B, bBb)$ und $h_c = (C, cCc)$. Die Fußpunkte sind dann die Produkte $F_a = ah_a$, $F_b = bh_b$ und $F_c = ch_c$. Die Produkte der sich in den Ecken treffenden Geraden bezeichnen wir mit $k_a = bh_a c$, $k_b = ch_b a$ und $k_c = ah_c b$. Die Geraden h_a und k_a liegen also symmetrisch zu b und c usw. Nun bestimmen wir noch fünf Hilfsgeraden, indem wir etwa k_a an b und c spiegeln und so die Geraden $r_b = bk_a b$ und $r_c = ck_a c$ finden und – wenn die Seiten des Dreiecks nicht paarweise aufeinander senkrecht stehen, also $abc \neq 1$ ist – schließlich aus F_a die Lote $s_b = (F_a, r_b)$ und $s_c = (F_a, r_c)$ auf diese beiden Geraden fällen. Die fünfte Gerade ist $t_a = ak_b a$. Nun können wir mit der algebraischen Berechnung beginnen.

Zum ersten liegen die beiden Lote s_b und s_c spiegelbildlich zu a :

$$as_ba = aF_a s_b F_a a = h_a s_b h_a = h_a (F_a, r_b) h_a = (h_a F_a h_a, h_a r_b h_a) = (F_a, r_c) = s_c ,$$

weil

$$h_a r_b h_a = h_a b k_a b h_a = h_a b b h_a c b h_a = c b h_a = c b h_a c c = c k_a c = r_c .$$

Zum zweiten rechnen wir nach, daß

$$F_a r_c F_c = a h_a r_c c h_c = a h_a c k_a c c h_c = a b b h_a c k_a h_c = a b k_a k_a h_c = a b h_c = a k_c a$$

eine Gerade ist. Der Punkt F_c liegt also auf dem Lot, das aus F_a auf r_c gefällt werden kann, d.h., auf s_c . Zum dritten zeigen wir, daß k_b auch auf s_c senkrecht steht. Dazu berechnen wir das Produkt

$$r_b F_a t_a = b k_a b a h_a a k_b a = b k_a b h_a k_b a = b k_a k_a c k_b a = b c k_b a = b h_b = F_b .$$

Die Gerade $t_a = a k_b a$ ist also senkrecht auf dem Lot $(F_a, r_b) = s_b$, also ist $k_b = a t_a a$ senkrecht auf $as_ba = s_c$. Da nun aber sowohl F_a als auch F_c auf s_c liegen und k_b senkrecht s_c ist, muß das Produkt $F_a k_b F_c = u$ eine Gerade sein. Da aber

$$h_c h_b h_a = h_c c c h_b a a h_a = F_c k_b F_a = u$$

auch gleich dieser Geraden ist, liegen die drei Höhen im Büschel. Das wollten wir zeigen.

Schließlich prüfen wir, daß der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auch der Höhenschnittpunkt des Seitenmittendreiecks ist. Das ist nur dann unmittelbar klar, wenn das Parallelenaxiom gilt: Dann ist nämlich die Verbindung der Seitenmitten M_a und M_c parallel zur Seite b und das Lot in M_b auch senkrecht auf dieser Verbindung, ist also Höhe im Seitenmittendreieck. Gilt das Parallelenaxiom aber nicht, dann muß gerade gezeigt werden, daß die Mittelsenkrechte m_b senkrecht auf der Verbindung $M_a M_c$ ist. Wir sehen an der Konstruktion in Abb. A.5 und in Gleichung (A.1), daß $m_a m_b m_c = g$ eine Gerade ist und durch den Punkt B geht, d.h., $BgB = g$. Die Seiten a und c gehen aber auch durch B , deshalb ist agc auch eine Gerade durch B . Das formen wir um in

$$agc = a m_a m_b m_c c = M_a m_b M_c .$$

Das Produkt $M_a m_b M_c$ ist eine Gerade. Folglich steht m_b senkrecht auf der Verbindung $M_a M_c$, ist also Höhe im Seitenmittendreieck. Dual zu dieser Ableitung ist der Beweis, daß die Höhen eines Dreiecks auch Winkelhalbierende im Dreieck der Fußpunkte sind.

Für weiterführende Darstellungen verweisen wir auf das Buch von F.Bachmann [4] und andere Literatur [118, 119, 120, 128, 129, 130]. Die algebraische Methode erlaubt, so man sich an die Formalisierung gewöhnt hat, auch dann noch schnell und zuverlässig Schlüsse zu ziehen, wenn die Zeichnung unerquicklich kompliziert wird. Darüberhinaus eröffnet sie auch neue Möglichkeiten des Rechnens. Dennoch sei dem Leser empfohlen, einen Blick in die Bücher aus der hohen Zeit der synthetischen Geometrie zu werfen [111, 126, 127].

Anhang B

Transformationen

B.1 Koordinaten

Üblicherweise bezeichnet man die Punkte eines Raums oder der Welt durch Koordinaten. Das sind Zahlenwerte, die uns so etwas wie räumliche Entfernungen in verschiedene Richtungen oder auch zeitliche Intervalle angeben. Die Definition von Koordinaten selbst kann axiomatisch versucht werden, sie kann aber auch explizit erfolgen.

Zunächst entstehen Koordinaten nicht anders als durch eine willkürliche, aber stetige Zuordnung von Zahlenkombinationen zu den einzelnen Punkten des Raums, bzw. den einzelnen Ereignissen der Welt (Abb. B.1). Wir sind frei, andere Koordinaten zu substituieren. Es ist eine zweite Frage, wie die Beschreibung der uns interessierenden Objekte solchen Substitutionen anzupassen ist. Mit Ausnahme der allgemeinen Relativitätstheorie wird diese Freiheit nicht voll eingesetzt. Statt dessen beruft man sich auf die Notwendigkeit, die existierende Bewegungsgruppe einfach darzustellen. Eine Bewegung verschiebt die Punkte und Figuren in neue Positionen und Orientierungen. Nehmen wir an, es gebe eine Untergruppe derart, daß es für jeden Punkt A genau ein Element der Untergruppe gibt, das einen Ursprung O in A verschiebt. Dann nehmen wir einfach die Beschreibung der Elemente der Untergruppe als Koordinaten. Aber auch jetzt ist die Zuordnung der Koordinaten, das Koordinatensystem, nicht eindeutig. Die Transformationen, die unsere Darstellung nicht stören, sind die Automorphismen der Gruppe. Bei solch einer Transformation erzeugt die einfache Substitution der alten Koordinaten durch neue (die passive Transformation) das gleiche Resultat wie die physikalische Bewegung aller Objekte in die von den neuen Koordinaten bezeichneten Positionen (aktive Transformation). Bei richtiger Rechnung sind passive Transformationen zunächst nicht eingeschränkt. Die Auswahl der Bewegungen entsteht erst durch den Vergleich. In diesem Sinne sind Bewegungen die Transformationen, die sowohl aktiv als auch passiv ausgeführt werden können und dann das gleiche Ergebnis haben¹.

¹In der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Bewegungsgruppe in den meisten Fällen trivi-

In der Physik gehen wir implizit vor. Das erste Newtonsche Axiom der Mechanik sagt uns, daß es Koordinatensysteme gibt, in denen die kräftefreien Bewegungen geradlinig und gleichförmig verlaufen. Wir können uns dann über die Relation zu den Weltlinien vierer freier Körper ein zunächst *lineares* Bezugssystem konstruieren. Nach linearer Transformation eines solchen Bezugssystems erhalten wir ein anderes lineares Bezugssystem. Das dritte Newtonsche Axiom (in der Huygensschen Fassung) liefert uns den *Impulssatz* (Abb. 3.7) und mit ihm ein Maß im Raum und Zeit. Der Impulssatz impliziert die Existenz einer (trägen) Masse, die die Geschwindigkeiten wichtet, damit ein Erhaltungssatz erreicht wird. Die träge Masse erweist sich als Eigenschaft der Körper. Das lineare Bezugssystem, in welchem die Massen isotrop, also unabhängig von der Bewegungsrichtung, sind, heißen *Inertialsysteme*. Inertialsysteme sind Cartesische Koordinatensysteme der *Raum-Zeit*. Die Forderung nach Isotropie der Massen schafft die Möglichkeit, Längen von Strecken verschiedener Richtung zu vergleichen. Die Stoßfigur definiert einen Kreis, d.h. den geometrischen Ort von Punkten, die gleich weit vom Zentrum entfernt sind. Wenn wir daran die Abstände messen, werden umgekehrt die Massen isotrop. Im allgemeine zerstören lineare Transformationen die Inertialsysteme. Nur eine Untergruppe der linearen Transformationen – die geometrischen Bewegungen in der Raum-Zeit – schaffen aus Inertialsystemen wieder Inertialsysteme. Wie diese Untergruppe aussieht, hängt davon ab, wie sich die Masse eines Objekts mit der Geschwindigkeit ändert.

Lineare Koordinatensysteme können auch dann existieren, wenn keine kräftefreien Teilchen existieren. Nehmen wir ein homogenes Gravitationsfeld. Alle Objekte fallen mit der gleichen Beschleunigung. Akzeptieren wir ein Bezugsobjekt mit eben dieser Beschleunigung, erscheinen die Weltlinien als übliche Geraden, d.h. Kurven, die durch eine lineare Beziehung zwischen geeigneten Koordinaten ihrer Punkte beschrieben werden können (Abb. B.2). Das ist das Konzept des frei fallenden Beobachters. Es erlaubt in der allgemeinen Relativitätstheorie die Einführung lokaler Inertialsysteme und die Anwendung der speziellen Relativitätstheorie, soweit das Bezugssystem als linear angesehen werden kann. In der mathematischen Abstraktion sind die Weltlinien immer Geraden, weil die definierenden Relationen nicht von Koordinaten abhängen.

B.2 Inertialsysteme

Ist die Masse von der Geschwindigkeit unabhängig, so wie wir das im Groben durchaus bestätigt finden, sind es die *Galilei-Transformationen*, die zwischen Inertialsystemen

al, d.h., sie enthält nur das Eins-Element, das überhaupt nichts bewegt, und nur die sogenannten algebraisch speziellen Lösungen gestatten nicht-triviale Bewegungsgruppen. Nur in Ausnahmefällen enthält die Bewegungsgruppe eine transitive Untergruppe, die zur eindeutigen Definition von Koordinaten benutzt werden kann. Der deSitter-Kosmos (Kapitel 7) hat eine maximale Bewegungsgruppe.

stemem vermitteln. In der Ort-Zeit-Ebene schreiben wir

$$\begin{pmatrix} t^* \\ x^* \end{pmatrix} = \mathcal{G}[v] \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix},$$

d.h. ,

$$\begin{aligned} t^* &= t + t_0, \\ x^* &= x - vt + x_0. \end{aligned}$$

Hier ist v die Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme gegeneinander, t_0 eine Verschiebung des Nullpunktes der Zeit, x_0 eine Verschiebung des Ursprungs im Raum. Die Matrix

$$\mathcal{G}[v] = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -v, & 1 \end{pmatrix}$$

ist der formelseitige Ausdruck der Galilei-Drehung, wie wir sie konstruktiv dargestellt haben. Das Produkt zweier solcher Matrizen ist wieder von gleicher Gestalt, wir haben es mit einer Bewegungsgruppe zu tun. Bei der Zusammensetzung zweier Galilei-Transformationen addiert sich die Geschwindigkeit ($\mathcal{G}[v_1]\mathcal{G}[v_2] = \mathcal{G}[v_1 + v_2]$). In einer vierdimensionalen Raum-Zeit müssen wir auch räumliche Drehungen einschließen, und die Galilei-Transformationen werden durch

$$\begin{pmatrix} t^* \\ \mathbf{x}^* \end{pmatrix} = \mathcal{G}[\mathcal{A}, \mathbf{v}] \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix},$$

d.h. ,

$$\begin{aligned} t^* &= t + t_0, \\ \mathbf{x}^* &= \mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{v}t + \mathbf{x}x_0 \end{aligned}$$

gegeben. Diese Transformationen bilden die Bewegungsgruppe der Newtonschen Mechanik, die Galilei-Gruppe. Transformationen ohne Rotation bilden eine kommutative Untergruppe,

$$\mathcal{G}[\mathcal{E}, \mathbf{v}_1]\mathcal{G}[\mathcal{E}, \mathbf{v}_2] = \mathcal{G}[\mathcal{E}, \mathbf{v}_2]\mathcal{G}[\mathcal{E}, \mathbf{v}_1] = \mathcal{G}[\mathcal{E}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2].$$

Geschwindigkeiten werden durch Addition zusammengesetzt.

Die Wellengleichung für eine Erregung Φ ,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = \text{Quelle}, \quad (\text{B.1})$$

ändert bei Galilei-Transformationen ihre Form. Es erscheinen gemischte partielle Ableitungen, und die durch Gleichung (B.1) beschriebene Isotropie der Ausbreitung verschwindet (Kapitel 4). Die Forderung nach universeller Isotropie der Lichtausbreitung ist die nach der Invarianz der Wellengleichung, wenn c die Lichtgeschwindigkeit ist². Die Transformationen zwischen den Inertialsystemen dürfen die Form

²Wenn es gelingt, Objekte und Meßapparate allein aus Lösungen einer Wellengleichung zu konstruieren, ergibt sich eine entsprechende Relativität auch dann, wenn die Wellengeschwindigkeit nicht die Lichtgeschwindigkeit ist und die Wellen einen Träger haben, der dann allerdings mit den so konstruierten Meßgeräten nicht erfaßbar ist [54].

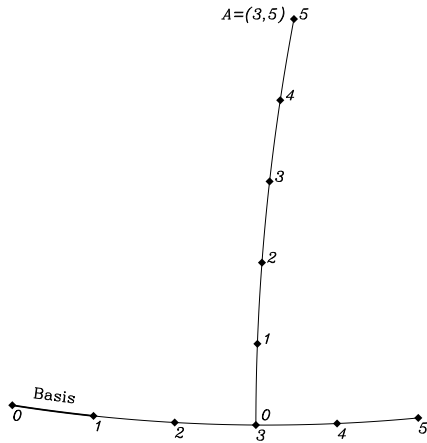


Abbildung B.1: Einfache Koordinatenkonstruktion

Ausgehend von einer Basis tragen wir in zwei definierte Richtungen ab, bis der zu bezeichnende Punkt erreicht ist. Die Koordinaten sind die Anzahl der Schritte. Voraussetzung für ein solches Verfahren ist aber ein metrischer Raum: Man muß eine Strecke abtragen können und auch einen rechten Winkel besitzen, noch dazu mit Orientierung!

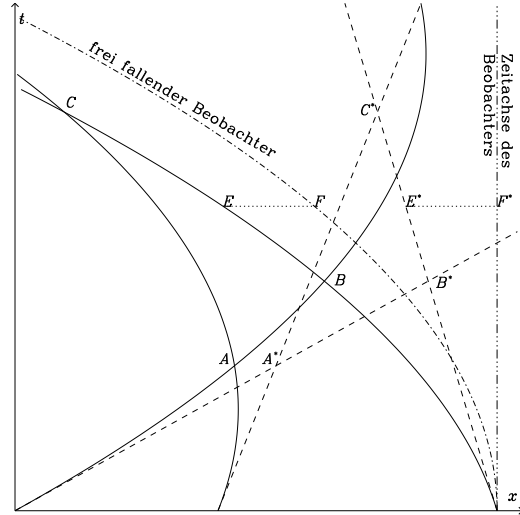


Abbildung B.2: Frei fallende Bezugssysteme

Wir zeichnen drei Weltlinien mit gleicher Beschleunigung. Es sind Parabeln. Lassen wir einen Beobachter mit gleicher Beschleunigung fallen (strichpunktierte Kurve) und beziehen die räumliche Koordinate auf ihn, finden wir gerade Linien in seinem Bezugssystem (dreifach strichpunktierte Linie). So wird mit der Verschiebung von F in F^* auch E in E^* verschoben. Entsprechend wird das krummlinige Dreieck ABC in das gewöhnliche Dreieck $A^*B^*C^*$ verschoben.

der Wellengleichung nicht antasten. Man kann zeigen, daß solche Transformationen weiter linear sind. Im zweidimensionalen Fall ist die (allgemeine homogene) lineare Transformation

$$\begin{aligned} ct^* &= \gamma (\alpha ct - \beta x) , \\ x^* &= \gamma (x - vt) \end{aligned}$$

eine Bewegung des neuen Ursprungs $x^* = 0$ mit Geschwindigkeit v gegen das alte Bezugssystem. Die Koeffizienten α , β und γ müssen noch bestimmt werden. Die Invarianz der zweidimensionalen Wellengleichung bedeutet

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad \alpha = 1 , \quad \beta = \frac{v}{c} .$$

Wir erhalten diese Werte auch auf dem Umweg über die in Abbildung 5.1 eingeführten Lichtkoordinaten. Dort wurde gezeigt, daß das Produkt $\xi[P]\eta[P] =$

$\xi[S[P]]\eta[S[P]]$ erhalten bleibt. Das ist unserer Formel für die (spezielle) *Lorentz-Transformation*³

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct^* \\ \mathbf{x}^* \end{pmatrix} &= \mathcal{L}[v] \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ct_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix}, \\ ct^* &= \frac{ct - \frac{v}{c}\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + ct_0, \\ \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x} - \frac{v}{c}ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

äquivalent. Wieder ist die Matrix $\mathcal{L}[v_{\text{relativ}}]$ der formelseitige Ausdruck der Drehung, wieder bilden die Transformationen eine Gruppe, wieder findet man die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten mit $\mathcal{L}[v_1]\mathcal{L}[v_2] = \mathcal{L}[V]$. Jedoch ist die Zusammensetzung nun nicht mehr linear. Wir erhalten statt dessen Einsteins Additionstheorem der Geschwindigkeiten,

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (\text{B.2})$$

Folglich trägt die Relativgeschwindigkeit nicht mehr den Charakter eines Winkels, den wir als additiven Parameter der Drehungen kennen. Sie ist vielmehr der hyperbolische Tangens eines solchen Parameters, denn Gleichung (B.2) ist das Additionstheorem dieser Winkelfunktion:

$$\tanh[\theta_1 + \theta_2] = \frac{\tanh[\theta_1] + \tanh[\theta_2]}{1 + \tanh[\theta_1]\tanh[\theta_2]}.$$

In der vierdimensionalen Raum-Zeit werden die speziellen Lorentz-Transformationen

$$\begin{pmatrix} ct^* \\ \mathbf{x}^* \end{pmatrix} = \mathcal{L}[\mathcal{E}, \mathbf{v}] \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

durch die Formeln

$$\begin{aligned} ct^* &= \frac{ct - \frac{1}{c}\mathbf{v}\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{x}^* &= \mathbf{x} - \frac{\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v}\mathbf{x} + \mathbf{v} \frac{\frac{\mathbf{v}\mathbf{x}}{v^2} - t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

gegeben. Die speziellen Lorentz-Transformationen bilden in der vierdimensionalen Raum-Zeit *keine* Untergruppe: Sind die Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 nicht

³Wir lassen die Translationen des Ursprungs ($x^* = x + x_0$, $t^* = t + t_0$) hier weg. Sie bilden eine Untergruppe. Werden sie in die Lorentz-Gruppe einbezogen, spricht von der inhomogenen Gruppe oder Poincaré-Gruppe.

parallel, enthält das Produkt der speziellen Lorentz-Transformationen immer eine Drehung. Das ist Ausdruck der Krümmung des Geschwindigkeitsraums und der *Thomas-Präzession*. Der Geschwindigkeitsraum erhält eine hyperbolische Geometrie [140, 141]. Er bleibt euklidisch im Kleinen, hat aber negative Krümmung. In der Ebene beschreiben die Geschwindigkeitskoordinaten Kleins Modell der nichteuklidischen Geometrie (Abschnitt D.3).

Der Geschwindigkeitsraum ist eine Projektion der Zeit- oder Massenschalen. Mit dem hyperbolischen Winkel können auch hier Polarkoordinaten analog der Kugel eingeführt werden. Der Unterschied besteht darin, daß auf der Kugel die Kreise fester Poldistanz θ jenseits des Äquators wieder kleiner werden und die doppelte Poldistanz des Äquators die Kugel vollständig überdeckt. Auf der Zeitschale, der Massenschale, dem Geschwindigkeitsraum kann die Poldistanz dagegen unbeschränkt wachsen.

Die Invarianz der Wellengleichung zieht die Invarianz des Linienelements

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \sum_{ik} \eta_{ik} dx^i dx^k$$

mit

$$\eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

nach sich. Dies ist Ausdruck des Satzes des Pythagoras (Abb. 5.2). Ein Linienelement wird zur Bestimmung der Bogenlänge einer Kurve gebraucht. In der euklidischen Geometrie nehmen wir eine Kurve $Q[\lambda] = [x[\lambda], y[\lambda]]$ und teilen sie in infinitesimal kleine Segmente, die ihrerseits nach Pythagoras

$$d[Q[\lambda], Q[\lambda + d\lambda]] = ((x[\lambda + d\lambda] - x[\lambda])^2 + (y[\lambda + d\lambda] - y[\lambda])^2)^{\frac{1}{2}}$$

ausgewertet und dann integriert werden. Der Ausdruck

$$ds^2 = (x[\lambda + d\lambda] - x[\lambda])^2 + (y[\lambda + d\lambda] - y[\lambda])^2 = dx^2 + dy^2$$

ist das euklidische Linienelement. Substituieren wir allgemeine Koordinaten ($x = x[\xi^1, \xi^2]$ und $y = y[\xi^1, \xi^2]$), entsteht eine allgemeine quadratische Form,

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} d\xi^i d\xi^k.$$

Diese Form kann einfach auf höhere Dimensionen und variable Koeffizienten verallgemeinert werden.

Auf der Weltlinie eines ruhenden Körpers ändern sich x , y und z nicht. Das Linienelement beschreibt daher im allgemeinen Falle den Verlauf der *Eigenzeit*, den Gang der Uhr, deren Fahrplan die betreffende Weltlinie ist, d.h.,

$$d\tau = \frac{1}{c} ds.$$

Wir erhalten die Vierergeschwindigkeit als normierte Tangente der Weltlinie $x^i = x^i[\lambda]$, ($i = 0, \dots, 3$). Sie ist der Zuwachs der vier Koordinaten mit der Eigenzeit,

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} [c, v_x, v_y, v_z] .$$

Die erste Komponente beschreibt die Zeitdilatation. Die Eigenzeitintervalle sind immer um den Faktor γ kleiner als die entsprechenden Intervalle der Systemzeit.

Der Viererimpuls entsteht nach Multiplikation der Vierergeschwindigkeit mit der Ruhmasse, d.h.,

$$p^i = m_0 u^i = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} [c, v_x, v_y, v_z] . \quad (\text{B.5})$$

Newtons drittes Axiom muß die Form

$$\sum_{A=1}^M p^i_A = \sum_{B=1}^N p^i_B \quad (\text{B.6})$$

erhalten. In dem beschriebenen Prozeß stoßen M Teilchen mit den Viererimpulsen p^i_A zusammen und bilden N Teilchen mit den Viererimpulsen p^i_B . Newtons zweites Axiom verknüpft die einzelnen Änderungen der Impulse mit der Kraft, d.h.,

$$F^i = \frac{dp^i}{d\tau} .$$

Die Stoßbedingung (B.6) muß ebenso wie die Konstanz der Ruhmasse ($\sum \eta_{ik} p^i p^k = m_0^2 c^2 = \text{const}$) als Bedingungen an die Kräfte F^i gelesen werden.

Die dreidimensional bewertete träge Masse ist durch

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gegeben. Diese Gleichung kennen wir als Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse (Gl. 5.4). Sie muß beobachtet werden, wenn es richtig ist, die Mechanik der universell isotropen Lichtausbreitung anzupassen. Ist die träge Masse geschwindigkeitsunabhängig, kann die Mechanik nur invariant gegen die Galilei-Gruppe sein.

B.3 Riemann-Räume, Einstein-Welten

Wenn wir den Lichtstrahl als Paradigma der geraden Linie akzeptieren und ein Schwerfeld die Lichtausbreitung beeinflusst, fallen alle Hoffnungen auf lineare Koordinaten zusammen. Die homogene oder gar euklidische Geometrie des Raums bzw. die Minkowski-Geometrie der Welt ist dann eine lokale Näherung, die nur so weit

verwendet werden darf, wie sich die Inhomogenität des Schwerfeldes nicht bemerkbar macht. Setzen wir Experimente an, in denen sie sich bemerkbar macht, etwa bei der Bewegung im interplanetaren Raum, können Raum und Welt nicht als homogen angesehen werden. Wir müssen akzeptieren, daß die Wellengleichung variable (allgemeine) Koeffizienten hat, d.h.,

$$\sum_{ik} g^{ik}[P] \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \Phi = \text{Quelle, erste Ableitungen} . \quad (\text{B.7})$$

Ihre Invarianz führt auf ein ebenfalls invariantes Linienelement

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}[P] dx^i dx^k \quad (\text{B.8})$$

mit

$$\sum_l g_{il} g^{lk} = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} .$$

Wir müssen einsehen, daß Koordinaten nun nicht mehr wie in homogenen Räumen durch Bewegungsgruppen definiert werden können. Die Substitution allgemeiner Koordinaten *muß* zugelassen werden, und die Beschreibung aller Objekte hat sich dem anzupassen. Diese Anpassung heißt *allgemeine Kovarianz*. Beginnt man die Konstruktion der Geometrie mit beliebigen Koordinaten, ist das Linienelement (B.8) der zentrale Begriff. Es bleibt eine modifizierte Form des Satzes des Pythagoras, genauer eine quadratische Form der Koordinatendifferenzen dx^i . Das Koeffizientenschema g_{ik} variiert mit dem Ort. – Weil der Abstand zweier Punkte nicht von den Koordinaten abhängen kann, dürfen Substitutionen neuer Koordinaten den Wert des Ausdrucks (B.8) nicht ändern. Folglich erfordert jede Substitution neuer Koordinaten ein bestimmtes Transformationsgesetz für das Koeffizientenschema g_{ik} , das dann *metrischer Tensor* genannt wird. Der Bezugsfall (B.4) heißt Minkowski-Tensor.

Die beiden Tensoren g_{ik} und g^{ik} sind zueinander invers, aber nicht mehr numerisch gleich wie in der Minkowski-Geometrie. Bei Koordinatentransformationen verhalten sie sich verschieden. Die Substitution neuer Koordinaten in Gleichung (B.7) ergibt das Transformationsgesetz

$$g^{*ik} = \sum_{lm} g^{lm} \frac{\partial x^{*i}}{\partial x^l} \frac{\partial x^{*k}}{\partial x^m} ,$$

wobei die bei der Substitution auftauchenden ersten Ableitungen einer gesonderten Behandlung bedürfen. Gleichung (B.8) ergibt

$$g^*_{ik} = \sum_{lm} g_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial x^{*i}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{*k}} .$$

Die überragende Bedeutung der Anpassung an allgemeine Koordinatensubstitutionen führt auf die Definition von Vektoren und Tensoren geradewegs durch die implizierten Transformationsgesetze. Vektoren und Tensoren werden transformiert durch Substitution kombiniert mit der Multiplikation mit einer Reihe von Jacobi-Matrizen ($\frac{\partial x^*}{\partial x}$). Zu jedem Index gehört ein Jacobi-Faktor, zu einem unteren ($\frac{\partial x^*}{\partial x}$), zu einem oberen ($\frac{\partial x}{\partial x^*}$). Entsprechend der Indexstellung spricht man von kovarianten und kontravarianten Vektoren⁴ und Tensoren. Das allgemeine Transformationsgesetz ist homogen:

$$A^{*i\dots} = \sum_l A^{l\dots} \frac{\partial x^{*i}}{\partial x^l}, \quad B^{*k\dots} = \sum_m B_{m\dots} \frac{\partial x^m}{\partial x^{*k}},$$

$$\sum_k A^{*k} B^*_k = \sum_m A^m B_m.$$

Objekte des gleichen Transformationstyps bilden eine Vektoralgebra, sie können verglichen und addiert werden und mit einem (skalaren) Faktor multipliziert werden. Ein Skalar ist ein Objekt, das nur substituiert, aber mit keiner Jacobi-Matrix multipliziert wird, also keinen Index trägt. Wir müssen zwischen unteren und oberen Indizes, d.h. zwischen Objekten verschiedenen Transformationstyps, gut unterscheiden. In einer forminvarianten Gleichung müssen alle Terme zum gleichen Transformationstyp gehören.

Es ist sehr wichtig, daß sich – nach diesen Vereinbarungen – bei Summation über ein Paar aus oberem und unterem Index die Transformationsmatrizen kürzen. Das ist auch der Anlaß, die Einsteinsche *Summationskonvention* einzuführen. Wir werden in Zukunft die Summationszeichen weglassen und automatisch Summation verlangen, wenn in einem Term der gleiche Buchstabe sowohl oben als auch unten erscheint. An Stelle von $\sum_m A^m B_m$ schreiben wir einfach $A^m B_m$. Von hier an wird diese Konvention benutzt.

Der erste kontravariante Vektor ist die Positionsänderung dx^i . Sein Transformationsgesetz ist die Darstellung des totalen Differentials. Daraus leitet sich ganz einfach die Vierergeschwindigkeit $u^i = dx^i/d\tau$ ab. Der erste kovariante Vektor ist der Gradient $\partial\Phi/\partial x^i$ eines Potentials Φ . Sein Transformationsgesetz ist identisch mit der Kettenregel für partielle Ableitungen. Das Produkt

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^k} dx^k \quad (= \sum_k \frac{\partial\Phi}{\partial x^k} dx^k, \quad \text{zur Erinnerung!})$$

ist das skalare totale Differential des Potentials Φ .

In der Newtonschen Mechanik wird eine konservative Kraft (Schwerkraft, elektrostatische Anziehung oder Abstoßung) durch den Gradienten eines Potentials beschrieben. Auch in der kanonischen Mechanik ist die Änderung der Impulskoordinaten gleich dem Gradienten der Hamilton-Funktion. Deshalb sind Kraft und Impuls

⁴In diesem Bild tragen Vektoren genau einen Index.

zunächst *kovariante* Vektoren. Die Beziehung zwischen Impuls und Geschwindigkeit enthält dann ganz offen die Metrik:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = F_i = \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m_{ik}u^k) = \frac{d}{d\tau}(g_{ik}m_0u^k) .$$

In allgemeinen Koordinaten kann ersichtlich die in $p_i = m_{ik}u^k$ erscheinende Masse anisotrop sein. Es ist eine physikalische Erfahrung, daß diese Anisotropie als Metrik angesehen werden kann. Dem haben wir entsprochen, als wir in Kapitel 3 den Kreis an symmetrischen Stößen definiert haben. Die Anisotropie wird völlig unsichtbar, wenn sich die Kraftgesetze ausschließlich auf diese Metrik stützen [29]. Das Beispiel dafür ist ein Potential, das der Wellengleichung⁵ (B.7) mit dem Inversen von g_{ik} als Koeffizientenschema g^{ik} . Anisotropie zwischen träger Masse und Wellengleichungen kann man testen [81]. Trotz einer Genauigkeit von 10^{-24} ist nichts gefunden worden.

In der Struktur des metrischen Tensors und seiner Änderung in Ort und Zeit sind die charakteristische Signatur und die Krümmung enthalten. Die allgemeine Behandlung eines solchen metrischen Raums führt auf die *Riemannsche Geometrie* inhomogen gekrümmter Räume und die *Einsteinsche Geometrie* inhomogen gekrümmter Welten. Die Wahl der Koordinaten und die Vektoralgebra müssen formal auseinandergehalten werden. Die Koordinatenwahl bleibt ja vollständig frei (wir konstruieren alles vollständig kovariant), die Vektoralgebra bleibt lokal. Das heißt, wir konstruieren die Vektoralgebren an jedem Punkt einzeln, die Vektorräume sind den Tangentialebenen an gekrümmten Flächen analog und behalten die euklidische oder pseudoeuklidische Geometrie, was nichts anderes heißt, als daß das euklidische bzw. pseudoeuklidische Skalarprodukt unverändert bleibt. Die Operationen der Vektoralgebra wie die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren (Gl. (B.5)) und die Addition (Gl. (B.6)) können an jedem Punkt *ohne* Berücksichtigung seiner Umgebung ausgeführt werden. Es ist aber eine neue Aufgabe, Vektoren an verschiedenen Punkten zu vergleichen, also etwa das zweite Newtonsche Axiom zu formulieren, in dem der Impuls an zwei verschiedenen Ereignissen verglichen wird. Die Subtraktion eines Vektors $p^i[\tau]$ am Punkte $P = [x^i[\tau]]$ von einem andern ($p^i[\tau + d\tau]$) an einem Nachbarpunkt ($Q = P + dP = [x^i[\tau] + dx^i]$) ist nun eine Operation, die den (parallelen) Transport des Vektors $p^i[\tau]$ von P nach Q einschließt. Die formale Entsprechung dieser Feststellung ist die Tatsache, daß der einfache Zuwachs dp^i nicht benutzt werden kann: Sein Transformationsgesetz ist nicht homogen, er gehört nicht zur Vektoralgebra. Der Paralleltransport von Vektoren durch den Raum oder die Welt erfordert eine gesonderte Vorschrift, die in Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie mit der Orientierung an Geodäten abgeleitet wird, so wie wir das in Kapitel 7 getan haben. Alles dies kann in Büchern zur allgemeinen Relativitätstheorie gefunden werden und ist nicht Gegenstand dieses Buches.

⁵Die Gleichungen für das elektromagnetische Feld wie für das Gravitationsfeld sind am Ende komplizierter. Dennoch enthalten sie nur die Metrik g_{ik} und auf ihr aufbauende Konstruktionen.

Anhang C

Projektive Geometrie

C.1 Algebra

Wir wollen hier nicht die axiomatische Begründung der projektiven Geometrie untersuchen, sondern auf anschaulichem Wege die Formalisierung finden, die ein einfaches arithmetisches Nachvollziehen der geometrischen Zusammenhänge gestattet. Wegen der anschaulichen Übertragung des Doppelverhältnisses von einer Geraden auf die nächste (Abb. 8.5) benutzen wir für die koordinatenseitige Darstellung der projektiven Ebene ein räumliches Strahlbüschel. Wir betten also die projektive Ebene in einen dreidimensionalen Raum, wählen ein Zentrum außerhalb der Ebene und ersetzen Geraden und Punkte der projektiven Ebene durch Ebenen und Strahlen, die von diesem Zentrum getragen werden (Abb. C.1). Es sei daran erinnert, daß wir die Einsteinsche Summationskonvention benutzen.

Wir haben schon bei der Übertragung des Doppelverhältnisses von Gerade zu Gerade gesehen, daß man die Punkte einer Geraden günstig durch Strahlen von einem Perspektivitätszentrum darstellt. Für die Ebene heißt das, daß wir die Punkte durch Strahlen im dreidimensionalen Raum (ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit cartesischen Koordinaten) charakterisieren, deren Richtungskoeffizienten nur bis auf einen Faktor bestimmt sind. Ein Punkt A ist durch ein Tripel $[A^1, A^2, A^3]$ gegeben, wobei ein gemeinsamer Faktor keine Bedeutung hat: $[A^1, A^2, A^3]$ und $\lambda \cdot [A^1, A^2, A^3]$ stellen denselben Punkt der projektiven Ebene dar. Diese Zeichenebene sei (wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit) durch $A^3 = 1$ gegeben. Auf der Zeichenebene haben die Punkte also die cartesischen Koordinaten

$$\xi = \frac{A^1}{A^3}, \quad \eta = \frac{A^2}{A^3}, \quad (\text{C.1})$$

die tatsächlich von einem Faktor λ unabhängig sind. Die Tripel $[A^1, A^2, A^3]$ listen daher homogene Punktkoordinaten.

Die Geraden der projektiven Ebene sind die Schnitte dieser Ebene mit den Ebenen durch den Ursprung. Strahlen durch den Ursprung in diesen Ebenen entsprechen

wiederum Punkten auf den Geraden der Zeichenebene. Die Gleichung solcher Strahlen lautet

$$g_1 A^1 + g_2 A^2 + g_3 A^3 = g_k A^k = 0, \quad (\text{C.2})$$

wobei die Ebene durch das Tripel ihrer Richtungskoeffizienten $g = [g_1, g_2, g_3]$ gegeben ist. Wie bei den homogenen Punktkoordinaten ist wieder ein gemeinsamer Faktor frei. Wir indizieren also Geradenkoordinaten unten und Punktkoordinaten oben und können so die Einsteinsche Summenkonvention ohne Gefahr benutzen und alle Summationszeichen weglassen. Steht in einem Produkt der gleiche Index einmal unten und einmal oben, wird automatisch über ihn summiert werden.

Weil sowohl Punkte als auch Geraden durch Koordinatentripel beschrieben werden, kann man eine Vertauschung ihrer Bedeutung untersuchen. Liest man in einer Konstruktion alle homogenen Punktkoordinaten als Geradenkoordinaten und alle Geradenkoordinaten als Punktkoordinaten und vertauscht man den Schnitt zweier Geraden mit der Verbindung zweier Punkte, entsteht wieder eine gültige Konstruktion: Dies ist die *Dualität* in der projektiven Geometrie der Ebene, die wir verschiedentlich zitieren.

Die zweidimensionale projektive Ebene läßt sich also am einfachsten mit der dreidimensionalen linearen Vektor-Algebra darstellen. Die Vektoren dieser Algebra sind die Tripel *homogener* Koordinaten. *Punkte* bezeichnen wir mit Großbuchstaben. Wenn wir Gleichung (C.1) beachten, sehen wir, daß die Ferngerade alle Punkte mit $A^3 = 0$ enthält. Aus den gewohnten cartesischen Koordinaten (ξ, η) der Ebene werden projektive Koordinaten, indem wir diese Ebene als Ebene $\zeta = 1$ im Raum auffassen und jedem Punkt den Strahl $(\lambda\xi, \lambda\eta, \lambda)$ zuordnen, für den λ unbestimmt bleibt, weil es die Stelle auf dem Strahl bestimmt. *Geraden* bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben. Wieder sind die Koordinaten nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt, der u.U. so gewählt werden kann, daß die Hessesche Normalform entsteht. Ein Punkt $A = [A^1, A^2, A^3]$ liegt auf der Geraden $g = [g_1, g_2, g_3]$, wenn $g_k A^k = 0$ ist.

Die Vektoralgebra gestattet aber nicht nur Multiplikation, sondern auch Addition. Diese geschieht komponentenweise, etwa

$$[g_1, g_2, g_3] + [h_1, h_2, h_3] = [g_1 + h_1, g_2 + h_2, g_3 + h_3]. \quad (\text{C.3})$$

Diese Addition ist unter homogenen linearen Transformationen invariant, d.h.,

$$\mathcal{T}(g + h) = \mathcal{T}g + \mathcal{T}h,$$

aber wir können nicht erwarten, Gleichung (C.3) als Addition zweier Geraden (die ja die Tripel g und h nicht eindeutig bestimmen) interpretieren zu dürfen. Wir rechnen mit einer solchen Addition unter den Bedingungen linearer Transformationen. Projektiv invariant definierte Relationen werden immer *homogen* in den einzelnen

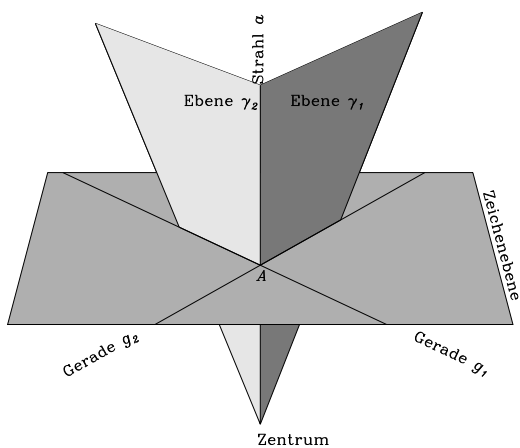


Abbildung C.1: Homogene Koordinaten
Zwei Ebenen γ_1 und γ_2 durch das Zentrum schneiden sich längs eines Strahls a durch das Zentrum. Ebenen und Strahl schneiden die Zeichenebene in zwei Geraden g_1 und g_2 und dem Punkt A . Wir charakterisieren die Gerade der Zeichenebene durch eine Ebene im Raum, die allein von der Richtung ihre Normalen bestimmt ist. Wir charakterisieren den Punkt der Zeichenebene durch einen Strahl im Raum, der wieder allein durch seine Richtung bestimmt ist. Der Betrag dieser Richtungsvektoren spielt keine Rolle.

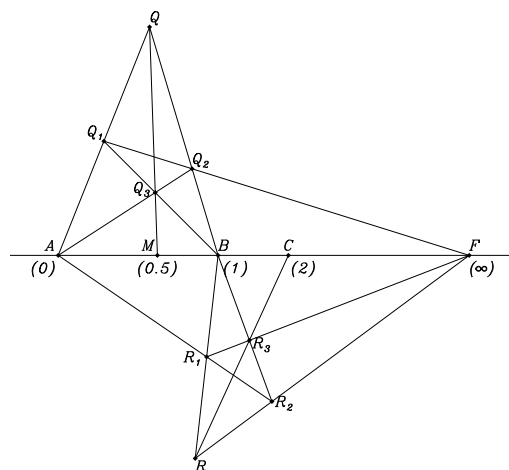


Abbildung C.2: Projektive Koordinaten
Projektive Koordinaten werden mit dem harmonischen Wurf konstruiert, dessen Form und Invarianz aus den Axiomen folgt. Auf einer Basisgeraden muß man von drei Punkten die Koordinate festlegen, etwa A mit der Koordinate 0 , B mit der Koordinate 1 und F mit der Koordinate ∞ . Wenn wir nun eine Basis $[A, B]$ vervielfachen wollen, suchen wir den Punkt C , der zusammen mit A die Punkte $[B, F]$ harmonisch teilt. Dadurch kann die Basis über die gesamte Gerade übertragen werden.

Variablen sein. Das ist im übrigen auch ein ganz brauchbarer Test, daß man richtig gerechnet hat. Wenn man also etwa eine Formel

$$P = P[A, \dots, g, \dots, B]$$

gefunden hat, dann sollte man prüfen, ob es wirklich Exponenten gibt, für die

$$P[\lambda_A A, \dots, \lambda_g g, \dots, \lambda_B B, \dots] = \lambda_A^{n_A} \dots \lambda_g^{n_g} \dots \lambda_B^{n_B} \dots P[A, \dots, g, \dots, B]$$

gilt. Findet man solche Homogenität nicht, sollte man einen Fehler in der Rechnung suchen. Hat man aber richtig gerechnet und findet dennoch keine Homogenität, dann ist P nur Objekt des linearen Raums, in dem wir gerechnet haben, *nicht* aber Objekt der projektiven Ebene.

Wir können ein Netz projektiver Koordinaten (Abb. C.2) so aufbauen, daß die Koordinaten auf jeder einzelnen Geraden ein Doppelverhältnis darstellen. Sind vier Punkte auf einer Geraden gegeben und kann das Doppelverhältnis der vier ersten

Koordinaten, der vier zweiten oder der vier dritten berechnet werden, so sollen alle drei gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte sein, so wie man es rekursiv aus einem harmonischen Wurf bestimmen kann. Das Mittel der Übertragung von Strecken, das zur Koordinatenkonstruktion vorhanden sein muß, ist hier der harmonische Wurf. Nacheinander angewendet, erzeugt er eine gleichmäßige Teilung der Geraden, die darauf durch harmonische Teilung verfeinert werden kann. Die Doppelverhältnisse werden dann zu Koordinaten. Es ist nicht nötig, zur Bestimmung projektiver Koordinaten etwa cartesische Koordinaten der euklidischen Ebene im Hinterkopf bereitzuhalten.

Wir definieren nun die Produkte der Vektoralgebra, die wir für unsere Rechnungen benötigen werden. Eben haben wir bereits das *Skalarprodukt* verwendet. Damit bezeichnen wir die Bildung

$$\langle g, A \rangle \stackrel{\text{def}}{=} g_k A^k . \quad (\text{C.4})$$

Punkt und Gerade kann man immer skalar multiplizieren, zwei Punkte oder zwei Geraden so einfach jedoch nicht¹. Das Skalarprodukt von Punkt und Geraden testet die Inzidenz, ob der Punkt A auf der Geraden g liegt oder die Gerade g durch den Punkt A geht. Oft läßt man auch die Klammern und das Komma weg und versteht in jeder Formelzeile gA oder Ag als Skalarprodukt. Virtuuell sind die Klammern natürlich zu beachten. Sie können nicht wie in gewöhnlichen Produkten bewegt werden. Wir werden sie immer setzen, damit Verwechslungen mit Gruppenoperationen vermieden werden. – Zwei Punkte werden durch das *Kreuzprodukt* auf eine Gerade (die Verbindungsgerade) abgebildet, zwei Geraden auf einen Punkt (den Schnittpunkt). Wir definieren entsprechend

$$a \times b \stackrel{\text{def}}{=} [a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1] , \quad (\text{C.5})$$

und wir schreiben dafür

$$(a \times b)^k = \epsilon^{klm} a_l b_m , \quad (A \times B)_k = \epsilon_{klm} A^l B^m .$$

Die dreifach indizierten Symbole ϵ_{klm} und ϵ^{klm} sind das Signum der entsprechenden Permutationen. Das Permutationssymbol ϵ ist Null, falls zwei Indizes gleich sind, es ist gleich $+1$, wenn die Permutation gerade, und -1 , wenn die Permutation ungerade ist. So ist $\langle A, A \times B \rangle = \langle B, A \times B \rangle = 0$. Die beiden Punkte A und B liegen auf der Geraden $A \times B$, und das Duale gilt ebenfalls. Die beiden Geraden g und h gehen durch den Punkt $g \times h$. Das Kreuzprodukt ist antisymmetrisch. Es gilt die wichtige Formel

$$(A \times (g \times h)) = g \cdot \langle A, h \rangle - h \cdot \langle A, g \rangle . \quad (\text{C.6})$$

¹Ein Skalarprodukt kann gegen lineare Transformationen nur invariant sein, wenn sich die Faktoren kontragredient transformieren, d.h. der eine Faktor mit dem Inversen der Transformationsmatrix des anderen. Die beiden Faktoren müssen also verschiedenen Vektorräumen angehören. In der euklidischen Geometrie, wo die Transformationsmatrizen orthogonal sind, fällt das nicht auf. Im Gegenteil, dort wird das Skalarprodukt oft mit der Metrik identifiziert.

Wieder läßt man oft die Klammern weg und versteht in einer Formelzeile AB oder gh als Kreuzprodukt. Wieder bleiben die Klammern virtuell präsent und dürfen nicht bewegt werden. Das Kreuzprodukt AB ergibt die Koeffizienten der Verbindungsgeraden, gh die des Schnittpunkts. – Aus Kreuzprodukt und Skalarprodukt kombinieren wir das *Spatprodukt*. Ein Punkt ist kollinear mit zwei anderen Punkten, wenn er auf deren Verbindungsgeraden liegt. Das Spatprodukt dreier Punkte

$$[P, Q, R] \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_{klm} P^k Q^l R^m = \langle P, Q \times R \rangle \quad (\text{C.7})$$

testet die Kollinearität, das Spatprodukt dreier Geraden

$$[f, g, h] \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon^{klm} f_k g_l h_m = \langle f, g \times h \rangle$$

die Konkurrenz (das Schneiden in einem Punkt bzw. die Büscheleigenschaft). Das Spatprodukt dreier kollinearere Punkte verschwindet ebenso wie das dreier konkurrierender Geraden. Es gilt die Regel

$$\langle P, (Q \times R) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} [P, Q, R] = [R, P, Q] \stackrel{\text{def}}{=} \langle R, (P \times Q) \rangle, \quad (\text{C.8})$$

und so weiter. Die Regel (C.6) erweitert sich zu

$$(P \times Q) \times (R \times S) = R \cdot [P, Q, S] - S \cdot [P, Q, R]. \quad (\text{C.9})$$

Sind im Spatprodukt zwei Faktoren proportional (im Sinne der homogenen Koordinaten also gleich), verschwinden das Kreuzprodukt und das Spatprodukt. Das Spatprodukt kann als Volumen des Parallelepipedes aufgefaßt werden, das von den Faktoren im euklidischen dreidimensionalen Raum aufgespannt wird. – Schließlich benennen wir noch das *direkte Produkt* zweier Tripel. Es ist eine Matrix, die je nach dem Charakter der Faktoren die Indizes oben oder unten trägt:

$$(P \circ Q)^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} P^i Q^j, \quad (P \circ g)^i_k = P^i g_k, \quad (g \circ h)_{kl} = g_k h_l. \quad (\text{C.10})$$

Daraus folgt u.a.

$$(P \circ Q)g = P \cdot \langle Q, g \rangle.$$

Wenn über mehrere Verbindungen und Schnittpunkte gerechnet werden muß, ergeben sich viele ineinandergeschachtelte Kreuzprodukte, die mit den Formeln (C.6), (C.9) und

$$\langle g \times h, A \times B \rangle = \langle g, B \rangle \langle h, A \rangle - \langle g, A \rangle \langle h, B \rangle$$

vereinfacht werden können. Darauf gründet die wichtige Zerlegungsformel

$$g \circ (a \times b) + a \circ (b \times g) + b \circ (g \times a) = \mathcal{E} [a, b, g], \quad (\text{C.11})$$

die für alle g, a, b gilt, deren Spatprodukt nicht verschwindet.

C.2 Projektive Abbildungen

Die Einführung homogener Koordinaten gestattet die Darstellung der projektiven Beziehungen durch *lineare Abbildungen* im dreidimensionalen Raum. Die Vereinfachung der Rechnung wird dabei mit der Erhöhung der Dimension „bezahlt“. Das einfachste Beispiel einer linearen Abbildung ist die Parallelprojektion. Geraden bleiben Geraden, und alle Verhältnisse auf den Geraden bleiben erhalten. Allgemein werden aus projektiven Abbildungen der Ebene nun lineare homogene Abbildungen des Raums, wenn aus den Punkten der Ebene nun Geraden durch ein Zentrum des Raums und aus den Geraden der Ebene nun Ebenen werden, die dieses Zentrum enthalten.

In unserem Falle gibt es zunächst vier Arten von linearen Abbildungen:

1. Abbildungen des Punktraums auf sich. Die entsprechenden Matrizen tragen einen Index oben, einen unten: $Q^* = \mathcal{T}[Q] = \mathcal{T}Q$, $Q^{*k} = T_l^k Q^l$.
2. Abbildungen des Geradenraums auf sich. Die entsprechenden Matrizen tragen einen Index oben, einen unten: $g^* = \mathcal{U}[g] = \mathcal{U}g$, $g_k^* = U_k^l g_l$.
3. Abbildungen des Punktraums auf den Geradenraum. Die entsprechenden Matrizen tragen beide Indizes unten: $g = \mathcal{A}[Q] = \mathcal{A}Q$, $g_k = A_{kl} Q^l$.
4. Abbildungen des Geradenraums auf den Punktraum. Die entsprechenden Matrizen tragen beide Indizes oben: $Q = \mathcal{B}[g] = \mathcal{B}g$, $Q^k = B^{kl} g_l$.

Sind die Determinanten der entsprechenden Matrizen von Null verschieden, definiert eine Abbildung des Punktraums durch ihr Inverses immer auch eine Abbildung des Geradenraums, und es gilt²

$$T_k^m U_m^l = \delta_k^l, \quad T_m^k U_l^m = \delta_l^k \quad \text{bzw.} \quad A_{km} B^{ml} = \delta_k^l, \quad B^{lm} A_{mk} = \delta_k^l.$$

Mit U als dem Inversen von T induziert die Abbildung des Punktraums auf sich eine Abbildung des Geradenraums auf sich. Die definierende Forderung verlangt, daß das Bild Q^* des Aufpunkts Q auf dem Bild g^* der Geraden g genau dann liegen soll, wenn Q auf g liegt. Dabei ergeben sich gleiche Skalarprodukte:

$$g_k^* Q^{*k} = g_l U_k^l T_m^k Q^m = g_l \delta_m^l Q^m = g_l Q^l.$$

Eine *projektive Abbildung* ist nun gerade solch ein Paar linearer Abbildungen. Die entsprechende Abbildung der Geraden geschieht also mit der inversen Matrix der Abbildung der Punkte: $g^* = g\mathcal{T}^{-1}$,

$$(\mathcal{T}Q)^k = T_l^k Q^l, \quad (g\mathcal{T}^{-1})_k = g_l (\mathcal{T}^{-1})_k^l. \quad (\text{C.12})$$

²Die Symbole δ_l^k stellen die Einheitsmatrix dar, also ist $\delta_l^k = 1$, falls $k = l$, und $\delta_l^k = 0$, falls $k \neq l$.

Wie in Abschnitt B.3 begründet, nennen wir die Punktkoordinaten kontravariant zu den Geradenkoordinaten, weil die Transformationsmatrizen zueinander invers sind, und schreiben zur Kenntlichmachung ihre Indizes oben. Die Geradenkoordinaten heißen entsprechend kovariant, und wir schreiben ihre Indizes unten. Das vermeidet nicht nur Verwechslungsfehler von Punkt- und Geradenkoordinaten, sondern zeigt auch, was bei projektiven Abbildungen zu tun ist. Die Abbildungsmatrizen tragen einen Index oben, einen unten. Bei Multiplikation mit Geraden ergibt sich wieder eine Gerade, bei Multiplikation mit Punkten wieder ein Punkt.

Eine Punkttransformation $Q^* = \mathcal{T}Q$ geht also einher mit der Geradentransformation $g^* = g\mathcal{T}^{-1} = g\mathcal{U}$. Das Skalarprodukt ist invariant ($\langle g, Q \rangle = \langle g^*, Q^* \rangle$), für das Kreuzprodukt gilt

$$(g_1\mathcal{U} \times g_2\mathcal{U})\mathcal{U} = (\det\mathcal{U})g_1 \times g_2, \quad \mathcal{T}(\mathcal{T}P_1 \times \mathcal{T}P_2) = (\det\mathcal{T})P_1 \times P_2 \quad (\text{C.13})$$

und daher auch

$$\mathcal{T}(g_1 \times g_2) = (\det\mathcal{T})(g_1\mathcal{T}^{-1}) \times (g_2\mathcal{T}^{-1}). \quad (\text{C.14})$$

Korollare für lineare Abbildungen \mathcal{A} von Punkten auf Geraden und Abbildungen $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ von Geraden auf Punkte sind:

$$\mathcal{A}(g_1 \times g_2) = (\det\mathcal{A})(\mathcal{B}g_1 \times \mathcal{B}g_2),$$

$$\mathcal{A}(g \times \mathcal{A}Q) = (\det\mathcal{A})(\mathcal{B}g \times Q),$$

$$\langle (Q_1 \times Q_2), \mathcal{B}(Q_3 \times Q_4) \rangle = (\det\mathcal{B})(\langle Q_1, \mathcal{A}Q_3 \rangle \langle Q_2, \mathcal{A}Q_4 \rangle - \langle Q_1, \mathcal{A}Q_4 \rangle \langle Q_2, \mathcal{A}Q_3 \rangle),$$

$$Q_1 \times \mathcal{B}(Q_2 \times Q_3) = (\det\mathcal{B})\mathcal{A}(Q_2 \langle Q_1, \mathcal{A}Q_3 \rangle - Q_3 \langle Q_1, \mathcal{A}Q_2 \rangle).$$

Projektive Abbildungen der Ebene lassen das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Punktreihe und von vier Geraden eines Strahlbüschels unverändert. Mit Hilfe eines Punktes S , der nicht auf $[A, B, C, D]$ liegt, können wir das Doppelverhältnis der Punkte als Doppelverhältnis der Volumina im dreidimensionalen homogenen Raum darstellen:

$$\mathcal{D}[A, B; C, D] = \frac{[A, C, S] [B, D, S]}{[A, D, S] [B, C, S]}. \quad (\text{C.15})$$

Das Doppelverhältnis hängt nicht von der Lage des Hilfspunkts S ab. Um das zu sehen, schreiben wir

$$\mathcal{D}[A, B; C, D] = \frac{\langle S, (A \times C) \rangle \langle (B \times D), S \rangle}{\langle S, (A \times D) \rangle \langle (B \times C), S \rangle}.$$

Die vier Geraden $A \times C$, $A \times D$, $B \times C$, $B \times D$ fallen nun aber alle zusammen, weil die vier Punkte auf einer Geraden liegen. Es geht nur noch um den Vergleich ihrer

Normierungen. Dies tut aber jede Multiplikation mit einer geeigneten Matrix, die in unserem Falle in der Form $S \circ S$ definiert ist, wobei S als Koordinatentripel eines Punktes aufgefaßt werden kann.

Drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 können bereits als Basis projektiver Koordinaten dienen. Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 müssen dazu linear unabhängig sein, d.h., sie dürfen nicht auf einer Geraden liegen. Die reziproke Basis im Geradenraum wird durch $g_1 = [Q_1, Q_2, Q_3]^{-1} Q_2 \times Q_3$, $g_2 = [Q_1, Q_2, Q_3]^{-1} Q_3 \times Q_1$, $g_3 = [Q_1, Q_2, Q_3]^{-1} Q_1 \times Q_2$ gegeben. Es gilt nach Gleichung (C.11) auch

$$Q_1 \circ (Q_2 \times Q_3) + Q_2 \circ (Q_3 \times Q_1) + Q_3 \circ (Q_1 \times Q_2) = [Q_1, Q_2, Q_3] \mathcal{E} . \quad (\text{C.16})$$

Ein Korollar dazu ist

$$\begin{aligned} & (Q_1 \times Q_2) \circ (Q_3 \times Q_4) + (Q_3 \times Q_4) \circ (Q_1 \times Q_2) + \\ & (Q_1 \times Q_3) \circ (Q_4 \times Q_2) + (Q_4 \times Q_2) \circ (Q_1 \times Q_3) + \\ & (Q_1 \times Q_4) \circ (Q_2 \times Q_3) + (Q_2 \times Q_3) \circ (Q_1 \times Q_4) = 0 . \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Eine projektive Transformation der Ebene ist bestimmt, wenn man von 4 Punkten die Bildpunkte kennt und keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Die vier Punkte müssen also ein vollständiges Viereck bilden, die Grundfigur aller projektiven Konstruktionen. Dementsprechend kann man aus fünf Punkten der projektiven Ebene bereits eine Invariante bilden, etwa $f[A, B, C, D; S] = \mathcal{D}_S[A, B; C, D]$ (Gl. C.15). Als Funktion von S unterscheidet die Invariante zwischen den Kegelschnitten, die sich durch A, B, C und D legen lassen. Diese Kegelschnitte bilden eine einparametrische Schar, deren Parameter die Invariante sein kann. Für die entarteten Kegelschnitte (Geradenpaare) nimmt sie die Werte 0, 1 und ∞ an. Liegen die vier Punkte A, B, C, D dagegen auf einer Linie, ist f ihr Doppelverhältnis und unabhängig vom fünften Punkt S (falls dieser nicht auch auf der gemeinsamen Geraden liegt). Die projektive Transformation ($\mathcal{T} : [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4] \rightarrow [Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*, Q_4^*]$) kann in der Form

$$\mathcal{T} = \lambda Q_1^* \circ (Q_2 \times Q_3) + \mu Q_2^* \circ (Q_3 \times Q_1) + \nu Q_3^* \circ (Q_1 \times Q_2)$$

gesucht werden, wobei λ, μ, ν durch die Gleichung des vierten Punktes ($Q_4^* = \mathcal{T} Q_4$) bestimmt werden müssen. Es entsteht

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{[Q_2^* Q_3^* Q_4^*]}{[Q_2 Q_3 Q_4]} Q_1^* \circ (Q_2 \times Q_3) \\ &+ \frac{[Q_3^* Q_1^* Q_4^*]}{[Q_3 Q_1 Q_4]} Q_2^* \circ (Q_3 \times Q_1) + \frac{[Q_1^* Q_2^* Q_4^*]}{[Q_1 Q_2 Q_4]} Q_3^* \circ (Q_1 \times Q_2) . \end{aligned}$$

Die Abbildung \mathcal{T} bleibt unbestimmt, wenn irgend drei der vier Punkte kollinear sind.

Der einfachste Satz, der mit den angeführten Regeln nachgerechnet werden kann, ist der Satz von Pappos (Abb. C.3). Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten

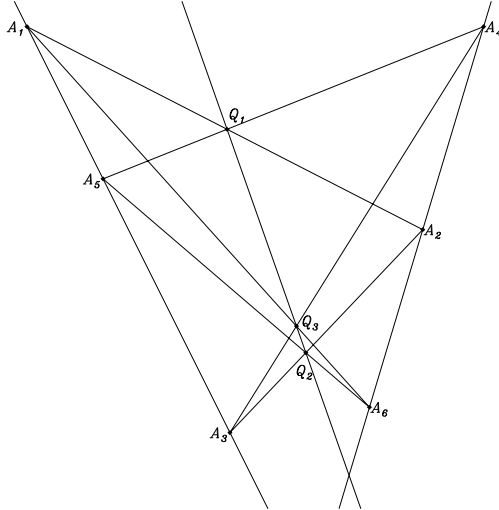


Abbildung C.3: Der Satz von Pappos

Liegen die Ecken $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden g und h , so liegen die Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q_3 gegenüberliegender Seiten ebenfalls auf einer Geraden.

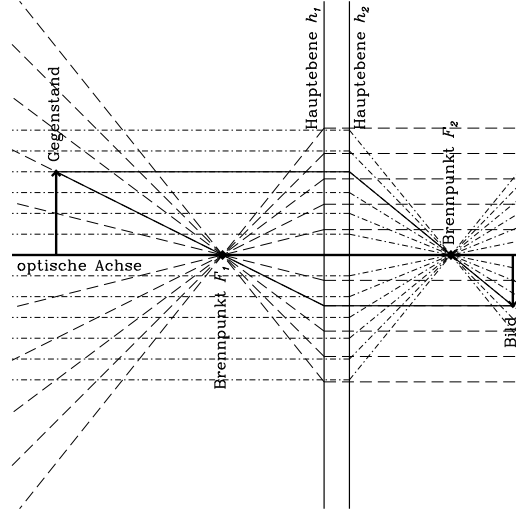


Abbildung C.4: Die dicke Linse

Die dicke Linse ist durch zwei Hauptebenen h_1 und h_2 und die Brennweite f bestimmt. Wie dargestellt entsprechen die achsenparallelen Strahlen den Strahlen durch die jeweiligen Brennpunkte.

eines Sechsecks sind durch $Q_1 = (A_1 \times A_2) \times (A_4 \times A_5)$, $Q_2 = (A_2 \times A_3) \times (A_5 \times A_6)$ und $Q_3 = (A_3 \times A_4) \times (A_6 \times A_1)$ gegeben. Gezeigt werden muß, daß $[Q_1, Q_2, Q_3] = 0$ ist, falls $[A_1, A_3, A_5] = 0$ und $[A_2, A_4, A_6] = 0$. Das geschieht durch direkte Anwendung der Regeln aus Abschnitt C.1.

Ein verblüffendes Beispiel für projektive Abbildungen ist die dicke Linse (Abb. C.4). In der Näherung achsennaher Strahlen kann man die Abbildung mit zwei Hauptebenen und den Brennpunkten konstruieren. Wir wählen als optische Achse $y = 0$ und setzen die Hauptebenen bei $x = x_1$ und $x = x_2$ (bei einer dünnen Linse fallen die beiden Hauptebenen zusammen, $x_1 = x_2$). Die Brennweite nennen wir f . Der gegenstandsseitige Brennpunkt hat dann die Koordinaten $F_1 = [x_1 - f, 0, 1]$, der bildseitige $F_2 = [x_2 + f, 0, 1]$. Die Geradenkoordinaten der Hauptebenen sind $h_1 = [-1, 0, x_1]$ und $h_2 = [-1, 0, x_2]$, der Fernpunkt der optischen Achse ist $O = [1, 0, 0]$. Das Strahlbüschel um F_1 wird auf das um den Fernpunkt der optischen Achse und dieses wiederum auf das Strahlbüschel um F_2 abgebildet. Dann finden wir als Matrix der projektiven Abbildung $\mathcal{T}A \propto (O \times (h_1 \times (F_1 \times A))) \times (F_2 \times (h_2 \times (O \times A)))$ den Ausdruck

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} f + x_2 & 0 & (f - x_1)(f + x_2) - f^2 \\ 0 & f & 0 \\ 1 & 0 & f - x_1 \end{pmatrix}. \tag{C.18}$$

Die Matrizen dieser Art bilden eine Untergruppe der projektiven Abbildungen: Jedes

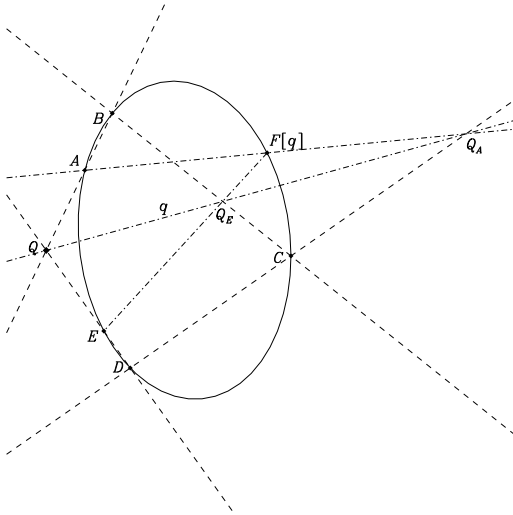


Abbildung C.5: Der Satz von Pascal

Wir schreiben in einen Kegelschnitt das Sechseck $ABCDEF$ ein. Die Paare gegenüberliegender Seiten (AB und DE , BC und EF , CD und FA) schneiden sich in Q_1 , Q_2 und Q_3 . Diese drei Punkte liegen auf einer Geraden, der Pascalschen Geraden. Diese Kollinearität wird durch Gleichung (C.21) beschrieben.

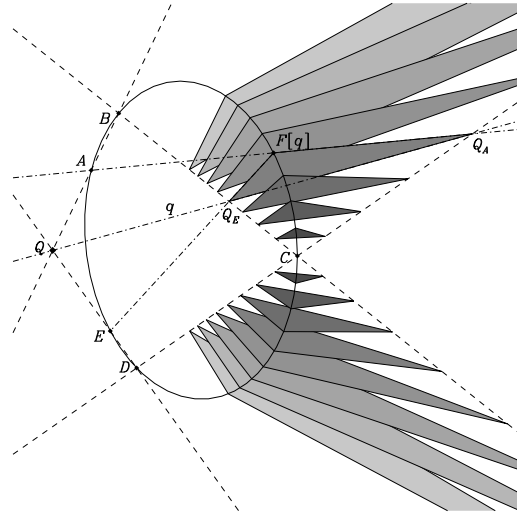


Abbildung C.6: Die projektive Definition des Kegelschnitts

Wir geben uns fünf Punkte $(ABCDE)$ vor und suchen einen sechsten (F) so, daß die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks $ABCDEF$ auf einer Geraden liegen. Zunächst schneiden sich AB und DE fest in Q . Nun ziehen wir irgendeine Gerade durch Q . Ihr Schnittpunkt mit $a = CD$ soll auf der Seite AF liegen, ihr Schnittpunkt mit $e = BC$ auf der Seite EF . Der Schnittpunkt beider ist der gesuchte Punkt F auf dem Kegelschnitt. Zu jeder Geraden durch Q finden wir einen solchen Punkt.

Linsensystem mit gemeinsamer optischer Achse ist (für achsennahe Strahlen) einer dicken Linse äquivalent. Besonders merkwürdig ist der Umstand, daß eine ideales Fernrohr³ die Brechkraft f^{-1} verschwindet und die Hauptebenen unendlich weit auseinanderrücken.

C.3 Kegelschnitte

Kegelschnitte können auf verschiedene Weise definiert werden. Am einfachsten ist es, sie als Kurven zweiter Ordnung zu charakterisieren, d.h. als Kurven, die eine quadratische Gleichung erfüllen. Wir haben sie als Punktmenge mit einer Gleichung $\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle = A_{kl}Q^kQ^l = 0$ oder als Tangentenbündel mit einer Gleichung

³In einem idealen Fernrohr fällt der bildseitige Brennpunkt des Objektivs mit dem gegenstandsseitigen Brennpunkt des Okulars zusammen.

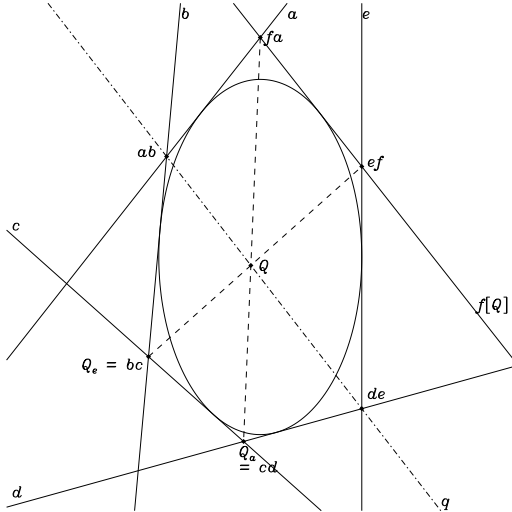


Abbildung C.7: Der Satz von Brianchon
Wir schreiben um einen Kegelschnitt das Sechseck $ABCDEF$ ein. Die Paare gegenüberliegender Ecken bestimmen konkurrenente Verbindungslinien: sie gehen durch einen Punkt P . Dieser Satz ist dual zum Pascalschen Theorem. Punkte sind mit Geraden, Verbindung mit Schnitt und Kollinearität mit Konkurrenz vertauscht.

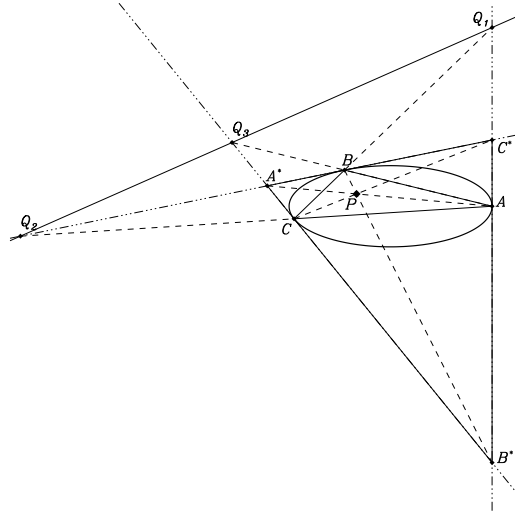


Abbildung C.8: Dreieck und Kegelschnitt
Wir lassen in Abb. C.5 jeweils zwei Punkte und in Abb. C.7 zwei Tangenten des Kegelschnitts zusammenfallen. Wir erhalten ein eingeschriebenes Dreieck und ein umschriebenes Dreieck. Die Schnittpunkte der Seiten des einen mit den gegenüberliegenden Seiten des anderen sind kollinear, die Verbindungslinien der Ecken des einen mit den gegenüberliegenden Ecken des anderen sind konkurrent.

$\langle t, \mathcal{B}t \rangle = B^{kl}t_k t_l = 0$ darzustellen. Die Matrizen \mathcal{A} und \mathcal{B} können symmetrisch gewählt werden, da eventuelle antisymmetrische Komponenten nicht in die Gleichung für den Kegelschnitt eingehen. Sowohl \mathcal{A} als auch \mathcal{B} können skaliert werden, d.h., sie haben nur 5 wesentliche Koeffizienten. Folglich sind Kegelschnitte durch die Angabe von 5 verschiedenen Punkten bestimmt.

Durch vier Punkte geht ein Kegelschnittbüschel. Seine Gleichung läßt sich am einfachsten mit dem Kreuzprodukt konstruieren. Weil das Spatprodukt verschwindet, wenn zwei Argumente übereinstimmen, geht jeder Kegelschnitt

$$\mathcal{K} = \lambda(g_{12} \circ g_{34} + g_{34} \circ g_{12}) + \mu(g_{13} \circ g_{24} + g_{24} \circ g_{13}) + \nu(g_{23} \circ g_{14} + g_{14} \circ g_{23}) \quad (C.19)$$

mit $g_{ik} = Q_i \times Q_k$ durch die vier Punkte Q_j : $\langle Q_j, \mathcal{K}Q_j \rangle = 0$ für alle vier Q_j . Alle drei Terme sind so konstruiert. Die Matrix \mathcal{K} ist eine Linearkombination mit drei Parametern. Die drei Terme sind nicht unabhängig: zwei reichen aus, um alle Kegelschnitte durch die vier Punkte darzustellen (Gl. C.17). Von den beiden verbleibenden Parametern kann einer fest normiert werden, weil alle Gleichungen homogen sind. Das Resultat ist eine einparametrische Schar von Kegelschnitten. Wenn wir verlangen,

daß der Kegelschnitt (C.19) auch noch durch den Punkt Q_5 geht, erhalten wir eine Gleichung für den verbleibenden Parameter. Setzen wir $\lambda = 1$ und $\nu = 0$, so ist $\langle Q_5, \mathcal{K}Q_5 \rangle = 0$ eine Gleichung für μ , das nun der Invariante C.15 entspricht. Wir finden für \mathcal{K} die Formel

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{Q_1 \times Q_2 \circ Q_3 \times Q_4 + Q_3 \times Q_4 \circ Q_1 \times Q_2}{[Q_1, Q_2, Q_5][Q_3, Q_4, Q_5]} \\ &- \frac{Q_1 \times Q_3 \circ Q_2 \times Q_4 + Q_2 \times Q_4 \circ Q_1 \times Q_3}{[Q_1, Q_3, Q_5][Q_2, Q_4, Q_5]}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Die quadratische Gleichung $\langle Q, \mathcal{K}Q \rangle = 0$ mit den Lösungen Q_i , ($i = 1, \dots, 5$) kann in der Form

$$[(Q_1 \times Q_2) \times (Q_4 \times Q_5), (Q_2 \times Q_3) \times (Q_5 \times Q), (Q_3 \times Q_4) \times (Q \times Q_1)] = 0 \quad (\text{C.21})$$

geschrieben werden. Die Lösungseigenschaft der Q_i findet man durch Einsetzen. Die Interpretation dieser Gleichung ist der Pascalsche Satz (Abb. C.5): Die gegenüberliegenden Seiten eines in einen Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks schneiden sich in Punkten, die auf einer Geraden, der Pascalschen Geraden, liegen. Der Satz von Pappos ist davon nur der Spezialfall eines in ein Geradenpaar entarteten Kegelschnitts. In Gleichung (C.21) ist $(Q_1 \times Q_2) \times (Q_4 \times Q_5)$ der Schnitt der beiden Seiten $(Q_1 \times Q_2)$ und $(Q_4 \times Q_5)$. Drei solcher Punkte liegen auf einer Geraden, d.h., ihr Spatprodukt verschwindet. Die Pascalsche Konfiguration kann zur punktweisen Konstruktion eines Kegelschnitts durch fünf Punkte dienen (Abb. C.6). Der Kegelschnitt wird dabei als Kurve definiert, für die der Pascalsche Satz gilt. Gleichung (C.21) zeigt dann, daß dies eine Kurve zweiten Grades ist.

Schließlich kann Abbildung C.6 als Konstruktion zweier projektiver Strahlbüschel gelesen werden. Deshalb kann man einen Kegelschnitt auch als Erzeugnis (Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen) zweier projektiver Strahlbüschel charakterisieren. Wir sehen das wie folgt. Einerseits wird das von A getragene Büschel perspektiv auf das Büschel Q abgebildet, vermittelt durch die Schnittpunkte auf der Geraden a . Das Büschel Q wiederum wird über e auf das Büschel E perspektiv abgebildet. Damit ist die projektive Beziehung zwischen den Büscheln E und A hergestellt. Die Punkte des Kegelschnitts sind die Schnittpunkte einander entsprechender Geraden der Büschel A und E . Ebenso sieht man, wie der Pascalsche Satz eingebettet ist, und man erhält die Äquivalenz der anderen Definitionen.

Eine Gerade schneidet den Kegelschnitt in 2 Punkten, die aber nicht unbedingt reell sind. Das ist eine triviale Folge der Tatsache, daß $\langle Q, \mathcal{K}Q \rangle = 0$ eine quadratische Gleichung ist. Ist etwa die Gerade durch $Q = P_1 + \lambda P_2$ gegeben, werden die Werte von λ für die Schnittpunkte durch die quadratische Gleichung $\langle Q, \mathcal{K}Q \rangle = \langle P_1, \mathcal{K}P_1 \rangle + 2\lambda \langle P_1, \mathcal{K}P_2 \rangle + \lambda^2 \langle P_2, \mathcal{K}P_2 \rangle = 0$ bestimmt. Wir erhalten zwei reelle Lösungen oder zwei komplexe oder einen reellen Doppelpunkt. Im letzten Fall berührt die Gerade den Kegelschnitt. – Sind beide Schnittpunkte K_1, K_2 einer Geraden $g = Q_1 \times Q_2$

reell und kennen wir den einen, finden wir den zweiten durch eine lineare Gleichung. Es gilt

$$K_2 = K_1 - 2 \frac{\langle K_1, \mathcal{K}Q_1 \rangle}{\langle Q_1, \mathcal{K}Q_1 \rangle} Q_1 . \quad (\text{C.22})$$

Anhang D

Der Übergang von der projektiven zur metrischen Ebene

D.1 Die Polarität

Projektive Abbildungen halten Punkte und Geraden getrennt: Es gibt zunächst keine lineare Abbildung von Punkten auf Geraden und umgekehrt (das Kreuzprodukt ist ja bilinear, es bildet *Paare* von Punkten auf Geraden und *Paare* von Geraden auf Punkte ab). Eine lineare Abbildung der Geraden auf Punkte und umgekehrt macht aus dem projektiven Raum die metrische Welt der Physik, in der wir Orthogonalität kennen und Längen und Winkel vergleichen und vervielfachen, also messen können. Wir benutzen die Summationskonvention.

Zunächst erinnern wir an das Axiom, daß alle Lote auf einer Geraden in einem Büschel liegen¹. Auf der projektiven Ebene gibt es also zu jeder Geraden einen besonderen Punkt, der dieses Büschel trägt. Lotrechtstehen ist daher in einem projektiven Modell durch eine Abbildung der Geraden g auf zugeordnete Punkte $P[g]$ bestimmt. Ist diese Abbildung projektiv, nennen wir sie Polarität und schreiben

$$P[g] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}g, \quad P^k[g] = B^{kl}g_l. \quad (\text{D.1})$$

Wir wollen nun zeigen, daß wir eine solche projektive Zuordnung aus drei Paaren von Geraden und Polen konstruieren können, wenn wir den Höhensatz voraussetzen. Da die Zuordnung dann auch eindeutig sein muß (Abb. D.1), legt uns der Höhensatz also tatsächlich auf eine projektive Abbildung der Geraden auf ihre Pole fest. Wir gehen in drei Schritten vor. Zuerst finden wir eine allgemeine Formel für den Höhensatz, dann zeigen wir, daß eine Matrix \mathcal{B} in Gleichung (D.1) symmetrisch sein muß, und schließlich konstruieren wir sie formal.

¹Man kann schon dies als Spezialfall des Höhensatzes sehen.

Drei Paare von Geraden und Polen erfüllen den Höhensatz, wenn

$$[(P_1 \times (g_2 \times g_3)), (P_2 \times (g_3 \times g_1)), (P_3 \times (g_1 \times g_2))] = 0$$

ist. Entwickeln wir das Spatprodukt entsprechend den bekannten Regeln, finden wir

$$\langle g_1, P_2 \rangle \langle g_2, P_3 \rangle \langle g_3, P_1 \rangle = \langle g_1, P_3 \rangle \langle g_3, P_2 \rangle \langle g_2, P_1 \rangle . \quad (\text{D.2})$$

Drei Paare von Geraden und Polen, die den Höhensatz erfüllen, bestimmen den Pol jeder weiteren Geraden, wenn die drei Geraden nicht kollinear sind (Abb. D.1). Die drei Höhen $h_{4CDF} = ((D \times P_2) \times (F \times P_1)) \times C$, $h_{4AEF} = ((E \times P_2) \times (F \times P_3)) \times A$ und $h_{4BDE} = ((E \times P_1) \times (D \times P_3)) \times B$ schneiden sich in einem Punkt $P[g_4]$ (d.h., $[h_{4CDF}, h_{4AEF}, h_{4BDE}] = 0$), wenn die drei Ausgangspaare den Höhensatz (D.2) erfüllen. Die Abbildung $g_4 \rightarrow P[g_4] = h_{4CDF} \times h_{4AEF}$ ist linear und nicht vierter Ordnung in g_4 , wie es zunächst aussieht. Zerlegt man die Kreuzprodukte wie gehabt und kürzt man gemeinsame Faktoren, ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} P[g_4] &= h_{4CDF} \times h_{4AEF} \quad \propto \quad \mathcal{B} g_4 \\ \mathcal{B} &= \lambda_1 (g_2 \times g_3) \circ P_1 + \lambda_2 (g_3 \times g_1) \circ P_2 + \lambda_3 (g_1 \times g_2) \circ P_3 \\ \lambda_1 &= \langle g_1, P_2 \rangle \langle g_2, P_3 \rangle, \quad \lambda_2 = \langle g_2, P_1 \rangle \langle g_2, P_3 \rangle, \quad \lambda_3 = \langle g_3, P_2 \rangle \langle g_2, P_1 \rangle . \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Diese Matrix ist – wieder wegen des Höhensatzes – symmetrisch. Wir zeigen dies, indem wir für die drei Geraden g_i feststellen, daß $\langle g_i, \mathcal{B}g_k \rangle = \langle g_k, \mathcal{B}g_i \rangle$ gilt. Das ist eine einfache Rechnung, bei der wieder Gleichung (D.2) benutzt werden muß. Der Höhensatz hat also gezeigt, daß die Polarität eine projektive Abbildung mit symmetrischer Matrix ist.

Jede symmetrische Matrix, also jede Polarität, definiert einen Kegelschnitt – und umgekehrt. Hier ist der Kegelschnitt als Gesamtheit der Geraden bestimmt, die ihren eigenen Pol enthalten, $B^{kl}t_k t_l = 0$. Diese Geraden sind daher das Tangentenbündel $[t_k]$ des Kegelschnitts. Die zunächst abstrakte Polarität ist identisch mit der gewöhnlichen Polarität an einem Kegelschnitt. Die Tangenten enthalten ihren Pol. Es ist der jeweilige Berührungspunkt mit dem Kegelschnitt $P^k[t] = B^{kl}t_l$. Damit stehen die Tangenten auch senkrecht auf sich selbst: die definierende Gleichung muß so gelesen werden. Diese merkwürdige Eigenschaft kennen wir von den lichtartigen Geraden der pseudo-euklidischen Geometrie. – Wir können nun wie folgt formulieren: Die Polarität ist eine Lagebeziehung zum Kegelschnitt der selbstorthogonalen Geraden, den wir *absoluten Kegelschnitt* nennen wollen. Wenn \mathcal{B} umkehrbar ist, $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}$, finden wir zu jedem Punkt eine Polare, $p[Q] = \mathcal{A}Q$, $p_k[Q] = A_{kl}Q^l$. Die Polarität bildet dann Geraden und Punkte der projektiven Ebene eindeutig aufeinander ab. Sonderfälle entstehen, wenn diese Umkehrbarkeit nicht gegeben ist. Solche Sonderfälle haben wir in den Geometrien ohne Krümmung (d.h. mit Parallelenaxiom), wo alle Pole auf einer Geraden (der Ferngeraden) liegen, schon kennengelernt. Dort wird die 2-parametrische Geradenmenge auf eine einparametrische Punktmenge abgebildet. \mathcal{B} hat dann einen Rang kleiner als 3. Die Eigenschaften von \mathcal{B} bestimmen

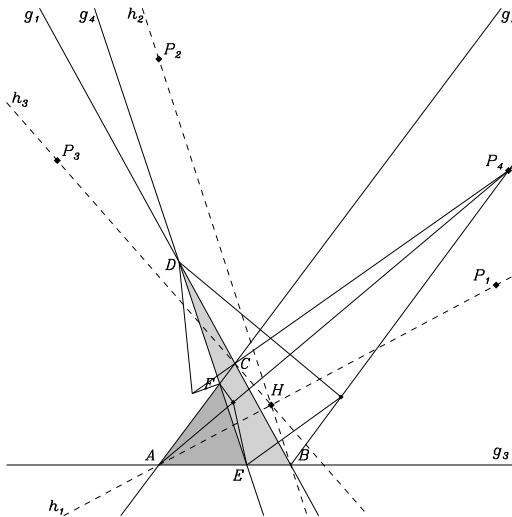


Abbildung D.1: Drei Beispiele bestimmen die Polarität

Durch drei polare Paare $[g_i, P_i]$, $i = 1, \dots, 3$ ist eine Polarität definiert. Schon drei polare Paare $[g_i, P_i]$, $i = 1, \dots, 3$ sind nicht frei wählbar. Schließlich sollen sich die Höhen des Dreiecks $[g_1, g_2, g_3]$ in einem Punkte schneiden (Abb. A.7). Der Höhenschnittpunkt liegt aber schon nach der Auswahl der ersten beiden Pole fest. Der dritte Pol muß auf der dritten Höhe liegen. Der Pol einer vierten Geraden g_4 ergibt sich nun als Schnitt der Höhen auf g_4 in den Dreiecken $[g_2, g_3, g_4]$, $[g_3, g_1, g_4]$ und $[g_1, g_2, g_4]$. Diese drei Höhen gehen durch einen Punkt P_4 .

Sind die drei gewählten Pole kollinear, ist ihre Verbindung die absolute Polare, fallen sie jedoch zusammen, definieren sie den absoluten Pol.

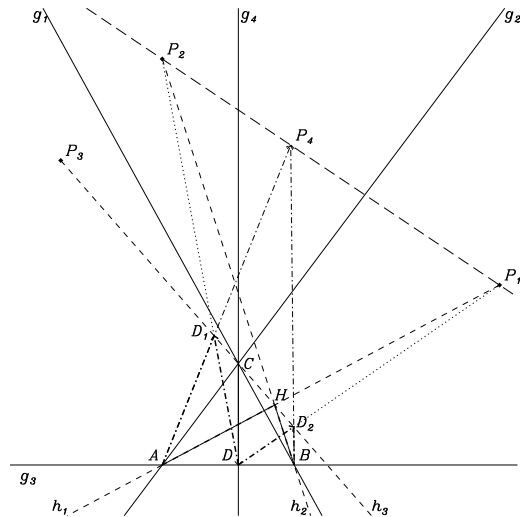


Abbildung D.2: Die Polarität ist eine projektive Abbildung

Wenn eine Polarität durch drei Paare von Gerade und Pol gegeben ist, bestimmt der Höhensatz, daß die Pole der zu g_1 und g_2 konkurrenten Geraden auf der Verbindung von P_1 und P_2 liegen. Die Abbildung ist projektiv (das Büschel C wird auf die Punktereihe g_3 abgebildet, speziell g_4 auf D , darauf g_3 aus P_2 auf h_3 , speziell D auf D_1 , und schließlich h_3 aus A auf die Verbindung P_1P_2 , speziell D_1 auf P_4). Die Gerade AD_1 ist die Höhe auf g_4 im Dreieck $[g_2, g_3, g_4]$. Analog konstruiert man BD_2 , die entsprechende Höhe im Dreieck $[g_1, g_3, g_4]$. Beider Schnitt (P_4) ist kollinear mit P_1 und P_2 , weil die drei Punkte Schnitte der Gegenseiten im Sechseck $[A, D_1, D, D_2, B, H]$ sind (Satz von Pappos, Abb. C.3).

die Geometrie, solange \mathcal{B} nicht ausgeartet ist. Im ausgearteten Falle ist die duale Polarität \mathcal{A} , die jedem Punkt P eine Gerade $g[P] = \mathcal{A}P$ zuordnet, nicht vollständig von \mathcal{B} bestimmt. Dann muß sie gesondert definiert werden. Im entarteten Fall ist $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$.

Viele Beziehungen der linearen Algebra erhalten nun eine einfache geometrische Bedeutung. Wir erinnern hier speziell an die Gleichung (C.13). Dort steht: Der Schnittpunkt zweier Geraden (bei nichtentarteter Polarität) ist der Pol der Verbindungslinie der Pole beider Geraden, und: Die Verbindungslinie zweier Punkte ist die Polare des Schnittpunkts der Polaren beider Punkte. Im Besonderen ist der Schnitt-

punkt zweier Tangenten des absoluten Kegelschnitts der Pol der Verbindungslinie der Berührungspunkte. Das ist die Konstruktion von Abbildung 8.14.

Das Bündel der Lote auf einer Geraden ist durch die (projektive) Zuordnung \mathcal{B} des Trägerpunktes bestimmt. Wir sprechen genau dann davon, daß zwei Geraden g und h aufeinander senkrecht stehen, wenn das Produkt $\langle h, \mathcal{B}g \rangle = h_k B^{kl} g_l = 0$ verschwindet. Sind zwei Geraden aufeinander senkrecht, dann liegt der Pol der einen jeweils auf der anderen Geraden. Die Polarität $P^k = B^{kl} g_l$, die jeder Geraden g einen Pol $P[g]$ zuweist, definiert damit eine metrische Geometrie. Der Begriff der Orthogonalität bezieht sich allein auf die Polarität. Wenn wir daraufhin Teilung und Vervielfachung mit dem harmonischen Wurf definieren, können wir daran gehen, die Gültigkeit der Axiome zu überprüfen.

Zu einer Polarität mit vollem Rang gibt es Polardreiecke, in denen jede Ecke Pol ihrer gegenüberliegenden Seite ist. Beginnen wir mit einer Geraden g , bestimmen ihren Pol $P[g]$ und ziehen durch diesen Pol eine Gerade h . Der Pol $P[h]$ liegt dann wieder auf g , und der Fußpunkt $F_g[h] = g \times h$ von h auf g ist Pol der Verbindungsgeraden $P[g] \times P[h]$. Laut Voraussetzung gilt $h_k g_l B^{kl} = 0$: so wie $P[g]$ die Gerade h trägt, liegt $P[h]$ auf g . Der Pol von $P[g] \times P[h]$ aber bestimmt sich wegen der Regel (C.13) zu $\mathcal{B}[\mathcal{B}[g] \times \mathcal{B}[h]] = \det[\mathcal{B}] g \times h$, d.h. als Schnittpunkt der Geraden g und h . In unserem Dreieck ist also jeder Punkt Pol der gegenüberliegenden Seite (Abb. D.3). – Mit unserer Definition des Senkrechtstehens haben wir nun ein Dreieck mit drei rechten Winkeln vor uns, wie wir es von der Kugel kennen. Abbildung 7.1 zeigt gerade ein solches Dreieck. Tatsächlich kann auf der Kugel jede Gerade durch das Paar ihrer Pole vertreten werden, die in der ebenen Projektion ja zusammenfallen. Im Falle eines reellen absoluten Kegelschnitts zerfällt die Menge der Punkte und Geraden in verschiedene einzeln invariante Teilmengen. Dann liegt das Polardreieck i.a. nicht mehr vollständig in *einem* Transitivitätsgebiet von Punkten und Geraden. Die projektive Ebene gestattet uns zwar noch, ein Polardreieck zu zeichnen (Abb. D.3), aber nicht alle Punkte dieses Dreiecks sind jetzt Elemente der Bewegungsgruppe der betrachteten induzierten Geometrie.

Bei vollen Rang von \mathcal{B} ist der Kegelschnitt $A_{kl} Q^k Q^l = 0$ mit der Einhüllenden des Tangentenbündels $B^{kl} t_k t_l = 0$ identisch. Jede Gerade g schneidet diesen Kegelschnitt in zwei u.U. imaginären Punkten $K_1[g]$ und $K_2[g]$. Die Tangenten an diese Punkte schneiden sich aber immer im reellen Pol $P[g]$ der Geraden. Die Pole eines Strahlbündels durch Q liegen auf der der Polaren $p[Q] = \mathcal{A}Q$ des Bündelträgers:

$$\langle Q, g \rangle = \langle \mathcal{A}Q, \mathcal{B}g \rangle .$$

Ist $\langle Q, g \rangle = 0$, so ist eben auch $\langle \mathcal{A}Q, \mathcal{B}g \rangle = 0$. Das Bild $\mathcal{A}Q$ des Punktes liegt dann auf dem Bild $\mathcal{B}g$ der Geraden.

Hat \mathcal{B} den Rang 3, ist \mathcal{A} als Inverses bestimmt. – Hat \mathcal{B} den Rang 2, ist für \mathcal{A} die Subdeterminantenmatrix $A_{mn} = \epsilon_{ijm} \epsilon_{kln} B^{ik} B^{jl}$ zu nehmen. Diese erfüllt als einzige nichttriviale die Gleichung $A_{ik} B^{kl} = 0$ und hat selbst den Rang 1. Da \mathcal{B} über die Gleichung $\mathcal{B}p = 0$ eine absolute Polare p (das projektive Bild der Ferngeraden)

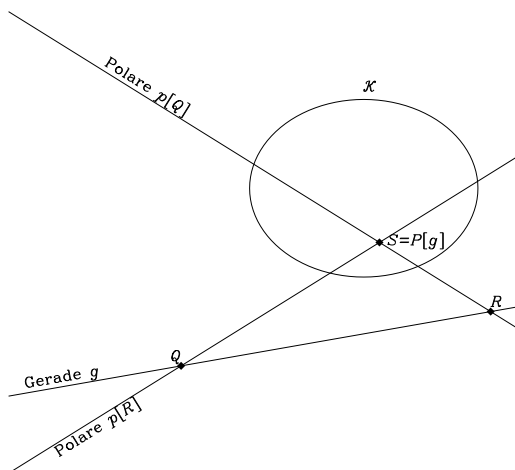


Abbildung D.3: Polardreiecke

In die projektiven Ebene legen wir eine Gerade g und auf diese einen Punkt Q . Die Polare $p[Q]$ schneide g in R . Dessen Polare $p[R]$ schneidet g wieder in Q und $p[Q]$ in einem dritten Punkt S . Dieser ist der Pol $P[g]$ von g . Auf diese Weise haben wir ein Dreieck gefunden, dessen Seiten die Polaren der Ecken sind. In der Zeichnung ist der reelle Fall des absoluten Kegelschnitts gezeichnet.

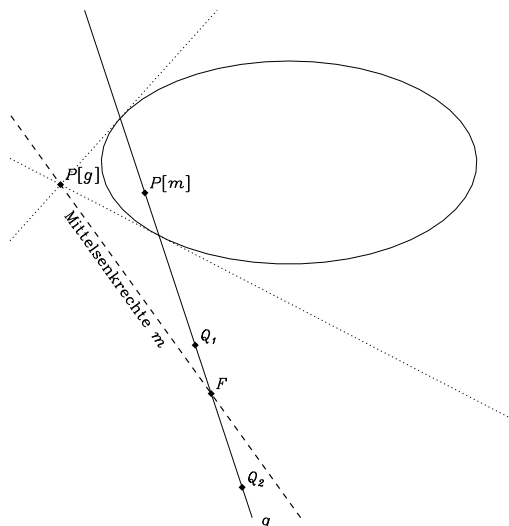


Abbildung D.4: Die Mittelsenkrechte

Zur Suche der Mittelsenkrechten zwischen zwei Punkten Q_1 und Q_2 konstruieren wir zuerst die Verbindungsgerade g und ihren Pol. Die Mittelsenkrechte m muß von diesem Pol getragen werden und g in einem Punkt F schneiden. Der Pol von m teilt mit F sowohl $[Q_1, Q_2]$ als auch den absoluten Kegelschnitt harmonisch. $P[m]$ und F sind gleichwertige Mittelpunkte von Q_1Q_2 .

bestimmt, kann man \mathcal{A} in der Form $\mathcal{A} = p \circ p$ schreiben. Schneidet g diese Polare in $F[g] = g \times p$, dann liegen die Paare $[F[g], \mathcal{B}g]$ in einer Involution auf der absoluten Polaren. Deren Fixpunkte sind reell, wenn \mathcal{B} indefinit ist (Minkowski-Geometrie). – Ist \mathcal{B} vom Rang 1, dann kann \mathcal{A} vom Rang 2 sein. In diesem Falle kehren sich die Verhältnisse um. Die Gleichung $\mathcal{A}P = 0$ definiert den absoluten Pol P , und \mathcal{B} kann in der Form $\mathcal{B} = P \circ P$ geschrieben werden. Die Punkte Q definieren Strahlen $f[Q] = Q \times P$ durch P , die mit den Polaren $\mathcal{A}Q$ in einer Involution im Polarenbüschel liegen. Deren Fixstrahlen sind dann reell, wenn \mathcal{A} indefinit ist (Anti-Minkowski-Geometrie). – \mathcal{A} kann aber ebenfalls vom Rang 1 sein (Galilei-Geometrie). Dann definiert $\mathcal{A}P = 0$ eine lineare Punktreihe, d.h. die absolute Polare, und $\mathcal{B}p = 0$ ein Strahlbüschel, dessen Träger der absolute Pol ist.

D.2 Die Spiegelung

Wir konstruieren nun die Formeln für die Spiegelungen. Wir gehen von einer Geraden g aus, an der die Spiegelung bewerkstelligt werden soll. Zunächst geht die Gerade und jeder einzelne Punkt auf ihr in sich selbst über. Verbinden wir einen

allgemeinen Punkt Q mit seinem Spiegelbild $S[Q]$, soll die Verbindungsgerade auf g senkrecht stehen. Sie muß also durch den Pol $P[g]$ der Geraden gehen, der auch in sich selbst übergeht. Der Fußpunkt F , in dem sich beide Geraden schneiden, bleibt auch unverändert. Also ist das Doppelverhältnis von $P[g]$ und F mit Q und $S[Q]$ gleich dem von $P[g]$ und F mit $S[Q]$ und Q , d.h. minus Eins. Wir finden $S[Q]$ durch eine harmonische Teilung auf dem Lot, das aus Q auf den Spiegel g gefällt werden kann. Der Ausdruck

$$S_g[Q] = SQ = (\mathcal{E}\langle g, \mathcal{B}g \rangle - 2\mathcal{B}g \circ g)Q, \quad S_l^k = \delta_l^k g_r B^{rs} g_s - 2B^{kr} g_r g_l \quad (\text{D.4})$$

ist eine Lösung dieser Bedingung. Dual dazu können wir auch nach einer Spiegelung an einem Punkt Q suchen. Die Objekte dieser Spiegelung sind dann Geraden. – Mit einem Punkt bleibt nun auch seine Polare bei der Spiegelung unverändert und gibt das feste Paar für den harmonischen Wurf mit einer Geraden h und ihrem Spiegelbild $S_A[h]$. Man erhält die duale Formel

$$S_Q[h] = hS = h(\mathcal{E}\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle - 2Q \circ Q \mathcal{A}), \quad S_l^k = \delta_l^k Q^r A_{rs} Q^s - 2Q^k Q^r A_{rl}. \quad (\text{D.5})$$

Man sieht unmittelbar, daß $S^2 = 1$ in beiden Fällen ist. Wenn darüber hinaus die Polarität nicht entartet ist, also $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}$ ist, stimmen beide Spiegelungen überein, $S_{Bg} = S_g$. Spiegelung an einer Geraden und Spiegelung an ihrem Pol sind dann identische Operationen². Ist aber \mathcal{B} nicht von vollem Rang, dann kann es Entartungsfälle geben. Generell ist eine Involution durch ein Paar aus Punkt Q und Gerade g bestimmt:

$$S = \mathcal{E}\langle Q, g \rangle - 2Q \circ g, \quad (\text{D.6})$$

aber nur, wenn g und Q ein polares Paar sind, bleibt die Polarität erhalten, und die Abbildung gehört zu unserer Bewegungsgruppe. Andernfalls beschreibt Gleichung (D.6) nur irgendeine projektive Involution. – Bei den Spiegelungen bleiben sowohl \mathcal{A} als auch \mathcal{B} erhalten. Liegt ein Punkt Q auf dem absoluten Kegelschnitt \mathcal{A} , d.h., $\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle = 0$, dann liegt auch sein Spiegelbild auf diesem Kegelschnitt. Tangiert eine Gerade den Kegelschnitt \mathcal{B} , d.h., $\langle g, \mathcal{B}g \rangle = 0$, dann tangiert auch ihr Spiegelbild diesen Kegelschnitt:

$$S_m^k A_{kl} S_n^l = A_{mn} (g_r B^{rs} g_s)^2, \quad S_m^k B^{mn} S_n^l = B_{mn} (g_r B^{rs} g_s)^2.$$

Punkte und Tangenten des Kegelschnitts gehen wieder in (i.a. andere) Punkte und Tangenten des Kegelschnitts über (Abb. 8.16).

Will man zwei Punkte Q_1 und Q_2 ineinander spiegeln, muß man die Mittelsenkrechte finden (Abb. D.4). Also bestimmen wir zunächst den Pol $P[Q_1 \times Q_2]$

²Wir sprechen hier von den Spiegelungen in der projektiven Ebene. Die Spiegelung am Pol ist im allgemeinen keine Punktspiegelung im Sinne von Anhang A, wenn der Pol nicht zur Bewegungsgruppe gehört. In der projektiven Ebene wird mehr dargestellt, als die vom Erzeugendensystem aufgebaute Bewegungsgruppe.

der Verbindungsgeraden. Der Pol $P[m]$ der gesuchten Mittelsenkrechten muß nun mit deren Fußpunkt $F = m \times (Q_1 \times Q_2)$ die beiden Aufpunkte Q_1 und Q_2 harmonisch teilen. Fußpunkt F und Pol $P[m]$ genügen also der Gleichung $F = Q_1 + \lambda Q_2$, $P = Q_1 + \mu Q_2$ mit

$$\frac{\mu}{\mu - \infty} \frac{\lambda - \infty}{\lambda} = -1, \quad \mathcal{A}P = F \times \mathcal{B}(Q_1 \times Q_2).$$

Einerseits ist also $\mu = -\lambda$, andererseits ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(Q_1 + \mu Q_2) &= (Q_1 - \mu Q_2) \times (\mathcal{B}(Q_1 \times Q_2)) \\ &\rightarrow \langle (Q_1 - \mu Q_2), \mathcal{A}(Q_1 + \mu Q_2) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Wir finden also $\mu^2 \langle Q_2, \mathcal{A}Q_2 \rangle = \langle Q_1, \mathcal{A}Q_1 \rangle$ und als Mittelsenkrechte

$$m[Q_1, Q_2] = \mathcal{B}[Q_1 \times Q_2] \times (Q_1 \pm Q_2 \sqrt{\frac{\langle Q_1, \mathcal{A}Q_1 \rangle}{\langle Q_2, \mathcal{A}Q_2 \rangle}}). \quad (\text{D.7})$$

Naturgemäß finden wir als Lösung zwei Punkte zu Q_1 und Q_2 , weil das Doppelverhältnis eine Relation zwischen vier Punkten ist. Einen wählen wir als Mittel- und Fußpunkt F , der andere ist dann der Pol $P[m]$ der Mittelsenkrechten. Die Spiegelung ist nun

$$\mathcal{S} = \mathcal{E}\langle P[m], m \rangle - 2P[m] \circ m.$$

Wollen wir zwei Geraden ineinander spiegeln, heißt es, die Winkelhalbierende zu finden. Die Konstruktion ist dual zu der eben durchgeführten. Die Winkelhalbierenden sind

$$w = h_1 \pm h_2 \sqrt{\frac{\langle h_1, \mathcal{B}h_1 \rangle}{\langle h_2, \mathcal{B}h_2 \rangle}}.$$

Die beiden Spiegelungen sind

$$\mathcal{S}_{\pm} = \mathcal{E}\langle \mathcal{B}w_{\pm}, w_{\pm} \rangle - 2\mathcal{B}w_{\pm} \circ w_{\pm}.$$

Im nichtentarteten Fall ist $\mathcal{A}[M_{\pm}] \propto M_{\mp} \times \mathcal{B}[Q_1 \times Q_2]$ und $\mathcal{B}[w_{\pm}] \propto w_{\mp} \times \mathcal{A}[h_1 \times h_2]$.

Das Produkt dreier Spiegelungen $h = agb$ durch einen Punkt findet man in der Form

$$g = a + \lambda b \rightarrow agb = h, \quad h = a + \frac{1}{\lambda} \frac{\langle a, \mathcal{B}a \rangle}{\langle b, \mathcal{B}b \rangle} b. \quad (\text{D.8})$$

Das Produkt $QgR = h$ findet man analog. Weil g auf der Verbindung QR lotrecht ist, liegt der Pol von g auf dieser Verbindungslinie.

$$\mathcal{B}g = Q + \lambda R \rightarrow QgR = h, \quad h = \mathcal{A}\left(Q + \frac{1}{\lambda} \frac{\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle}{\langle R, \mathcal{A}R \rangle} R\right). \quad (\text{D.9})$$

Das Produkt $aQb = R$ ist ein Punkt, wenn Q auf einem gemeinsamen Lot von a und b liegt, die Polare von Q also mit a und b durch einen Punkt geht:

$$\mathcal{A}Q = a + \lambda b \rightarrow R = \mathcal{B}\left(a + \frac{1}{\lambda} \frac{\langle a, \mathcal{B}a \rangle}{\langle b, \mathcal{B}b \rangle} b\right). \quad (\text{D.10})$$

Das Produkt $QER = F$ ist ein Punkt, wenn die Polaren durch einen Punkt gehen:

$$\mathcal{A}F = \mathcal{A}Q + \lambda \mathcal{A}R \rightarrow F = Q + \frac{1}{\lambda} \frac{\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle}{\langle R, \mathcal{A}R \rangle} R. \quad (\text{D.11})$$

Wir fügen noch zwei nützliche Formeln hinzu. Entsprechend (C.11) gilt für den Fall, daß $[g, a, b] = 0$, auch

$$g \propto a\langle b \times g, \mathcal{A}(a \times b) \rangle + b\langle g \times a, \mathcal{A}(a \times b) \rangle,$$

und für die Spiegelung $h = agb$ erhalten wir

$$h = b\langle a, \mathcal{B}a \rangle \langle b \times g, \mathcal{A}(a \times b) \rangle + a\langle b, \mathcal{B}b \rangle \langle g \times a, \mathcal{A}(a \times b) \rangle.$$

Alles gilt für die nichtentartete Polarität.

Wir erhalten auch Formeln für die Drehung, die aus zwei Spiegelungen um Geraden g_1 und g_2 durch das Drehzentrum zusammengesetzt wird. Solch ein Produkt hat die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{g_2} \mathcal{S}_{g_1} &= 4\langle g_1, \mathcal{B}g_2 \rangle \mathcal{B}g_2 \circ g_1 - 2\langle g_1, \mathcal{B}g_1 \rangle \mathcal{B}g_2 \circ g_2 \\ &\quad - 2\langle g_2, \mathcal{B}g_2 \rangle \mathcal{B}g_1 \circ g_1 + \langle g_1 \mathcal{B}g_1 \rangle \langle g_2, \mathcal{B}g_2 \rangle \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Wollen wir eine Drehung konstruieren, die eine Gerade g_1 in g_3 überführt, spiegeln wir erst an g_1 und dann an der Winkelhalbierenden

$$g_2 = g_1 + \sqrt{\langle g_1 \mathcal{B}g_1 \rangle / \langle g_3, \mathcal{B}g_3 \rangle} g_3.$$

D.3 Der Geschwindigkeitsraum

Der Raum der Relativgeschwindigkeiten ist das physikalisch einfachste und wichtigste Beispiel für die Lobachevski-Geometrie. Die Figuren im Geschwindigkeitsraum sind Hodogramme, jeder Punkt charakterisiert ein bestimmte Geschwindigkeit, die das präparierten Objekt annehmen kann. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt, alle Hodogramme sind also in Grenzkreise (bzw. Kugeln) eingeschlossen. Translationen in einem Hodogramm entstehen durch Zusammensetzung mit globalen Geschwindigkeiten. Dabei bleibt der Grenzkreis erhalten, d.h., Bewegungen mit Lichtgeschwindigkeit bleiben Bewegungen mit Lichtgeschwindigkeit. Die Translationen sind projektive Transformationen. Der reelle Grenzkreis ist der absolute Kegelschnitt. Damit hat der Geschwindigkeitsraum eine Lobachevski-Geometrie.

Unser Beispiel ist der Billardstoß. Die Figur der beim Billardstoß (Abb. 5.6) nach einer bestimmten Zeit erreichten Orte muß aus der symmetrischen Form (Abb. 2.8) durch einen auf der Relativität gegründeten Schluß hervorgehen. Wir gewinnen sie, wenn wir – entsprechend der Einsteinschen Zusammensetzung der Geschwindigkeiten – die Relativgeschwindigkeit zwischen dem symmetrischen Stoß und dem Billardstoß in die Figur des symmetrischen Stoßes einfügen. Aus dem Kreis der nach einer bestimmten Zeit erreichten Punkte wird eine Figur, die (nach euklidischer Beurteilung) eine Ellipse ist. Die Projektion des Mittelpunktes dieses Kreises finden wir experimentell durch den Schnitt der Verbindung der Endpunktpaare bei verschiedenen Stößen. Wir bestimmen zunächst die projektive Abbildung, die diese Translation bewirkt. Wir berechnen alles im Kleinschen Modell mit dem Rand

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 .$$

Die Matrix der Translation in x -Richtung ist etwa

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & \sqrt{1-r^2} & 0 \\ r & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Diese Abbildung führt den Randkreis in sich selbst über. Der Kreis $r^2 z^2 - x^2 - y^2 = 0$ wird in die gezeigte Ellipse verschoben: Aus $Q = [r \cos \varphi, r \sin \varphi, 1]$ wird

$$\mathcal{A}Q = [1 + \cos \varphi, \sqrt{1-r^2} \sin \varphi, \frac{1}{r} + r \cos \varphi] .$$

Wie es sein soll, wird der Punkt $[-r, 0, 1]$ in $[0, 0, 1]$ verschoben. Nun soll der Durchmesser $\beta = 2/(r + 1/r)$ gleich der Geschwindigkeit des stoßenden Teilchen sein, die hier auf die Lichtgeschwindigkeit bezogen ist. dann finden wir das zu verwendende r durch die Formel

$$r = \frac{1}{\beta}(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) .$$

Die Projektion $[r, 0, 1]$ des Mittelpunktes $[0, 0, 1]$ teilt den Durchmesser im Verhältnis

$$\gamma = \frac{r}{\frac{2}{r+1} - r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Dies ist das bereits bekannte Verhältnis der trägen Masse eines Körpers in Bewegung zu seiner Ruhmasse.

Eine Translation im Geschwindigkeitsraum ist eine Zusammensetzung aller Geschwindigkeiten mit einer festen Geschwindigkeit. Die Punkte auf dem Rand bleiben dort (der Betrag der Lichtgeschwindigkeit ändert sich nicht), bewegen sich aber auf dem Rand (Abb. D.5). Diese Bewegung ist die Aberration (Abb. 4.3). Ergänzt auf die Kugel, ergibt sich eine konforme Abbildung (Abb. 4.10). Die Gruppe der konformen Abbildungen der Kugel auf sich ist der (homogenen) Lorentz-Gruppe isomorph.

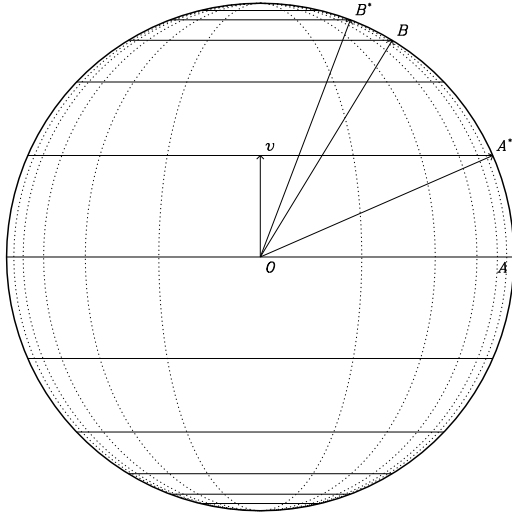


Abbildung D.5: Geschwindigkeitstranslation und Aberration

Der Kreis stellt den Geschwindigkeitsraum in der Form des Kleinschen Modells der nicht-euklidischen Geometrie dar. Der Vektor v zeigt die Translation an. Die Translation verschiebt die Familie der gezeigten Geraden in sich, wobei A in A^* und B in B^* übergeht. Die gepunkteten Kurven sind die Bahnkurven der Translation (siehe auch Abb. 9.16).

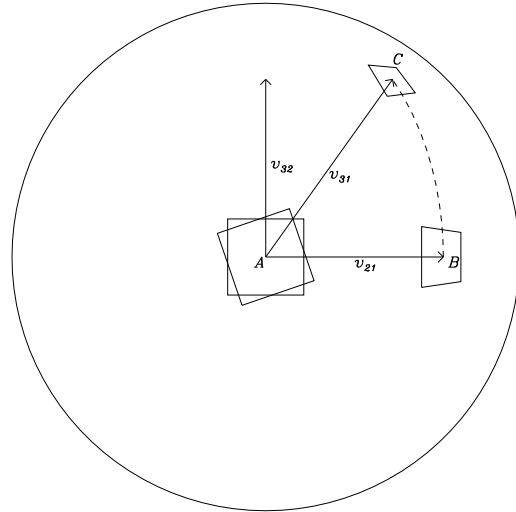


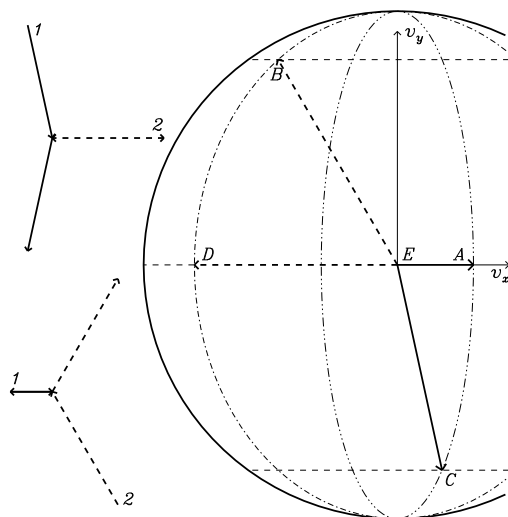
Abbildung D.6: Geschwindigkeitstranslationen bilden keine Gruppe

Die Zusammensetzung zweier Geschwindigkeitstranslationen ist nicht wieder eine Geschwindigkeitstranslation. An Hand der in Abb. D.5 gezeigten Bahnkurven der Translation sehen wir unmittelbar, daß die Zusammensetzung der zwei Translationen v_1 und v_2 eine Rotation relativ zur Translation mit der zusammengesetzten Geschwindigkeit v enthält. Diese Rotation ergibt die Thomas-Präzession.

Abbildung D.5 ist Anlaß, uns daran zu erinnern, daß zwei spezielle Lorentz-Transformationen mit Geschwindigkeiten in verschiedenen Richtungen nicht wieder eine spezielle Lorentz-Transformation ergeben. (Abb. D.6). Das liegt an der Krümmung des Geschwindigkeitsraums (Abb. 7.10, 7.11). Formal sehen wir das wie folgt. Die allgemeine Translation im Geschwindigkeitsraum mit der Geschwindigkeit $[u, v]$ hat die Transformationsmatrix

$$T[u, v] = \begin{bmatrix} \gamma + v^2 \frac{1-\gamma}{u^2+v^2} & -uv \frac{1-\gamma}{u^2+v^2} & \gamma u \\ -uv \frac{1-\gamma}{u^2+v^2} & \gamma + u^2 \frac{1-\gamma}{u^2+v^2} & \gamma v \\ \gamma u & \gamma v & \gamma \end{bmatrix}. \quad (\text{D.12})$$

Die (auf die Lichtgeschwindigkeit normierten Komponenten der Translation sind u und v , der Koeffizient γ ist wie immer $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2-v^2}$. Wir prüfen $T[u, v]T[-u, -v] = \mathcal{E}$ ohne Mühe. Ebenso sehen wir, daß $T[0, v]T[u, 0]$ eine Trans-



Links sehen wir zwei Ortsdiagramme eines Stoßes, bei dem ein von links kommendes Teilchen mit einem von rechts kommendem zusammenstößt. Die Bezugssysteme sind so gewählt, daß die Geschwindigkeit jeweils eines der beiden beim Stoß nur das Vorzeichen wechselt und dann nur eine v_x -Komponente hat. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme hat dann nur eine v_y -Komponente. Wird sie dem *einen* Diagramm mit dem richtigen Vorzeichen überlagert, ergibt sich das *andere*.

Rechts sehen wir das Geschwindigkeitsdiagramm, in dem diese Überlagerung eine Lobachevski-Translation in v_y -Richtung ist, die uns in bekannter Weise die Geschwindigkeiten $v[A]$ und $v[C]$ sowie $v[B]$ und $v[D]$ zueinander bestimmt. Die Punkte A und B zeigen die Geschwindigkeiten vor dem Stoß im unteren Bezugssystem. Sie werden durch die Geschwindigkeitstranslation in die Punkte C und D verschoben.

Abbildung D.7: Zur Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse. II.

formation ist, die das Zentrum $O = [0, 0, 1]$ in den Punkt $P = [u\sqrt{1-v^2}, v, 1]$ verschiebt. Die Kombination $\mathcal{T}[-u\sqrt{1-v^2}, -v]\mathcal{T}[0, v]\mathcal{T}[u, 0]$ hat dann den Fixpunkt O und ist eine *Rotation* um den Winkel φ mit

$$\sin \varphi = \frac{uv}{1 + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{1-u^2} + \sqrt{1-v^2}}{1 + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}.$$

Die mit Gleichung (D.12) beschriebenen reinen Geschwindigkeitstranslationen bilden keine Gruppe: In einem mehrfachen Produkt können die Faktoren nicht ohne weiteres zusammengefaßt werden. Das ist ein Korollar zu der Tatsache, daß die speziellen Lorentz-Transformationen (Gl. (B.3)) in einer vierdimensionalen Welt keine Untergruppe der Lorentz-Gruppe bilden.

Wir benutzen die Translationen im Lobachevski-Raum der Geschwindigkeiten, um zu zeigen, wie sie mit der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse zusammenhängen [134]. Abbildung D.7 skizziert Orts- und Geschwindigkeitsdiagramm eines speziellen ebenen Stoßes in zwei speziellen Bezugssystemen. Die Geschwindigkeit jeweils eines Teilchens wechselt nur das Vorzeichen und liegt dann in v_x -Richtung. Wir vergleichen nun die beiden so bezeichneten Bezugssysteme. Im rechten Teil sind die jeweiligen Geschwindigkeiten vor dem Stoß angegeben. In dem Bezugssystem der Skizze links unten sind das EA und EB, in dem oberen EC und ED. In beiden Fällen muß der Impulserhaltungssatz gelten. Wir setzen nun voraus, daß die Massen nur über einen Faktor $\gamma[v]$ von der Geschwindigkeit v abhängen und daß dieser nicht

von der Richtung abhängt, also $m[v] = m \cdot \gamma[v]$ gilt. Wir können $\gamma[0] = 1$ wählen. Der Erhaltungssatz für die wesentliche Komponente lautet nun in den beiden Bezugssystemen

$$\begin{aligned} m_1 \gamma[A] v_x[A] + m_2 \gamma[B] v_x[B] &= 0, \\ m_1 \gamma[C] v_x[C] + m_2 \gamma[D] v_x[D] &= 0. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Gleichung der Ellipse, also

$$\frac{v_x^2[C]}{v_x^2[A]} + \frac{v_y^2[C]}{c^2} = 1, \quad \frac{v_x^2[B]}{v_x^2[D]} + \frac{v_y^2[B]}{c^2} = 1.$$

Der Impulserhaltungssatz lautet damit

$$\begin{aligned} m_1 \gamma[A] v_x[A] + m_2 \gamma[B] v_x[D] \sqrt{1 - \frac{v_y^2[B]}{c^2}} &= 0, \\ m_1 \gamma[C] v_x[A] \sqrt{1 - \frac{v_y^2[C]}{c^2}} + m_2 \gamma[D] v_x[D] &= 0. \end{aligned}$$

Wir erinnern nun daran, daß $v_y[B] = -v_y[C]$ ist und schreiben dafür kurz $v_y[B] = u$. Der Impulserhaltungssatz stellt nun ein homogenes Gleichungssystem für $m_1 v_x[A]$ und $m_2 v_x[D]$ dar. Es ist nur dann lösbar, wenn die Bedingung

$$\gamma[A]\gamma[D] - \gamma[B]\gamma[C] \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = 0.$$

erfüllt ist. In der Grenze sehr kleiner v_x -Komponenten finden wir $\gamma[A] = \gamma[D] = 1$, $\gamma[B] = \gamma[C] = \gamma[u]$ und schließlich $\gamma[u] = 1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. Das ist der bekannte Lorentz-Faktor. Wir prüfen durch Einsetzen, daß diese Funktion $\gamma[u]$ auch im Falle nichtverschwindender v_x -Komponenten die Lösung ist. Im Ergebnis finden wir, daß die Einsteinsche Zusammensetzung der Geschwindigkeiten die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse erfordert (Tabelle 5.1).

D.4 Kreise und Peripherien

Wie schon oft bemerkt, ist es hilfreich, sich an der Kugel zu orientieren, um Formeln zu finden, deren Gültigkeit man danach prüfen kann. Wir bestimmen die Formel für einen Kreis auf der Kugel. Dort nehmen wir die dreidimensionale Einbettung zu Hilfe und bestimmen den Kreis auf der Oberfläche dadurch, daß die Vektoren vom Kugelmittelpunkt Z zum Kreismittelpunkt M und zu den Peripheriepunkten Q immer den gleichen Winkel einschließen:

$$\cos(\angle MZP) = \frac{\langle \vec{ZM}, \mathcal{A} \vec{ZQ} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{ZM}, \mathcal{A} \vec{ZQ} \rangle} \sqrt{\langle \vec{ZM}, \mathcal{A} \vec{ZQ} \rangle}} = \text{const}$$

mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir haben dabei berücksichtigt, daß die Vektorkoordinaten bereits die projektiven Punktkoordinaten sind (die Kugel wird ja aus dem Mittelpunkt projiziert) und daß es ein Skalarprodukt zwischen zwei Punkten nicht gibt, sondern eine Abbildung \mathcal{A} auf die Geraden dazwischengeschrieben werden muß, deren Matrix im Falle der Kugel aber gerade gleich der Einheitsmatrix ist und deshalb nicht explizit geschrieben werden müsste. Wir wollen aber eine allgemeine Formel, die nicht nur für die Kugel gilt, sondern für alle anderen Polaritäten auch. Für die Punkte Q eines Kreises um M ist also

$$\frac{\langle Q, \mathcal{A}M \rangle^2}{\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle \langle M, \mathcal{A}M \rangle} = \text{const} .$$

Die Konstante wird etwa durch einen Punkt Q_1 bestimmt, von dem wir wissen, daß er auf der Peripherie liegt. Also ist

$$\langle Q, \mathcal{A}M \rangle^2 \langle Q_1, \mathcal{A}Q_1 \rangle = \langle Q_1, \mathcal{A}M \rangle^2 \langle Q, \mathcal{A}Q \rangle .$$

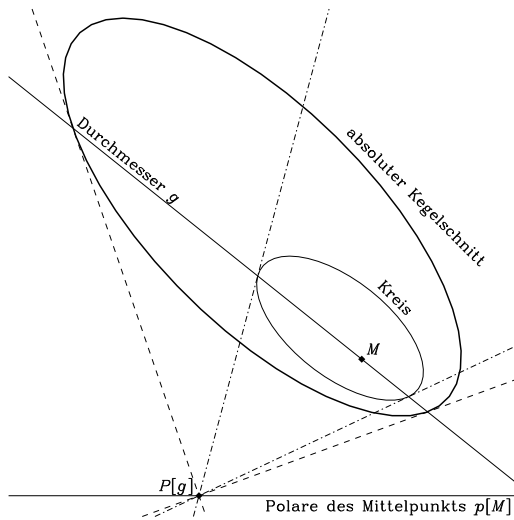
In anderen Worten, durch Q_1 ist der Radius und damit der Kreis bestimmt. Wir haben also schließlich die quadratische Form

$$\langle Q, \mathcal{K}Q \rangle = 0 , \quad \mathcal{K} = \mathcal{A} \langle Q_1, \mathcal{A}M \rangle^2 - \langle Q_1, \mathcal{A}Q_1 \rangle \mathcal{A}M \circ \mathcal{A}M \quad (\text{D.13})$$

erreicht. Ist \mathcal{A} und M gegeben, bleibt ein essentieller Parameter für die Definition der Kreise frei. Er entspricht dem Radius. Die Abbildungen 9.16 – 9.19 zeigen solche einparametrischen Scharen von Kreisen.

In der euklidischen Geometrie ist ein Kreis durch drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 bestimmt. Nun haben wir den Kreis als speziellen Kegelschnitt zu finden. Die beiden fehlenden Bestimmungsstücke für den Kegelschnitt werden durch die Beziehung zum absoluten Kegelschnitt ersetzt. Sind uns drei Punkte gegeben, konstruieren wir zunächst den Umkreismittelpunkt des Dreiecks als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten und benutzen dann Formel (D.13). Wir können auch durch Spiegelung an Mittelsenkrechten erst weitere Punkte konstruieren und dann die Formel (C.20) benutzen.

Wann bestimmt eine quadratische Form \mathcal{K} einen Kreis? Das ist der Fall, wenn es einen Mittelpunkt M gibt. Die von ihm getragenen Strahlen schneiden \mathcal{K} in zwei Punkten, deren Mitte immer durch M gegeben wird. Erinnern wir uns an Abbildung D.4, dann definieren die Strahlen g durch den Mittelpunkt Pole $P[g]$ bezüglich des absoluten Kegelschnitts, die auf der Polaren $p[M]$ von M liegen. Wegen der Teilung des Kreises \mathcal{K} ist die Polare am absoluten Kegelschnitt auch die Polare



Die metrischen Beziehungen seien durch einen absoluten Kegelschnitt bestimmt. Wir wählen den Mittelpunkt M des Kreises und bestimmen seine Polare $p[M]$. Nun betrachten wir einen Durchmesser g . Sein Pol $P[g]$ liegt auf der Polaren von M . Die (gestrichelten) Tangenten an den absoluten Kegelschnitt stehen auf g senkrecht. Die (strichpunktierten) Tangenten, die den Kreis in seinen Schnittpunkten mit dem Durchmesser g berühren, müssen ebenfalls auf g senkrecht stehen. Deshalb gehen sie auch durch $P[g]$. Das heißt, der Pol eines Durchmessers bezüglich des absoluten Kegelschnitts $\mathcal{B}g$ fällt mit dem Pol $\mathcal{K}^{-1}g$ bezüglich des Kreises selbst zusammen.

Kreise dieser allgemeinen Form sind die Rotationsbahnen von Kapitel 9.

Abbildung D.8: Der Kreis

am Kreis. Für das Strahlbüschel M gilt daher, daß $\mathcal{K}^{-1}g \propto \mathcal{B}g$ für alle m durch M gilt (Abb. D.8). Die Gleichung $\langle Q, \mathcal{K}Q \rangle = 0$ definiert also einen Kreis, wenn es ein Strahlbüschel M gibt, dessen Strahlen g Fixstrahlen von $\mathcal{K}\mathcal{B}$ sind:

$$\mathcal{K}\mathcal{B}g = \lambda g, \text{ bei festem } \lambda \text{ für alle } g \text{ mit } \langle g, M \rangle = 0.$$

Dual dazu muß es eine Punktreihe q (die dann gleich $p[M]$ ist) geben, deren Punkte Q die Bedingung

$$\mathcal{K}Q = \lambda \mathcal{A}Q, \text{ bei festem } \lambda \text{ für alle } Q \text{ mit } \langle q, Q \rangle = 0$$

erfüllen. Kreise sind die Kegelschnitte, die den absoluten Kegelschnitt zweimal berühren. Die Berührungspunkte liegen auf der Polaren $p[M]$ des Mittelpunkts M . In Abbildung D.8 sind sie aber nicht reell. Der Mittelpunkt M und seine Polare $p[M]$ sind nicht nur in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt, sondern auch in Bezug auf den Kreis selbst polar.

Wir bestimmen nun eine Peripherie, d.h. die Kurve, für die der Peripheriewinkelsatz gilt, den geometrischen Ort aller Punkte, die mit einer feste Sehne ein Dreieck festen Scheitelwinkels bilden. In der euklidischen wie in der pseudoeuklidischen Ebene ist das ein Kreis. Wir werden zeigen, warum im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung entsteht. – Wir leiten die Formel an der Kugel ab. Gegeben ist eine Sehne (zwei Punkte) auf der Kugel. Ein Punkt Q definiert zwei Ebenen mit den Normalformkoeffizienten $g_1 = Q \times Q_1$ und $g_2 = Q \times Q_2$. Der Winkel zwischen diesen beiden Ebenen ist der Winkel, unter dem Q_1Q_2 von Q aus gesehen wird. Dieser Winkel muß durch einen dritten Punkt Q_3 gegeben sein. Denken wir nun an den

Peripheriewinkelsatz, dann ist die Gleichung einer Peripherie also

$$\frac{\langle g_1, \mathcal{B}g_2 \rangle}{\sqrt{\langle g_1, \mathcal{B}g_1 \rangle \langle g_2, \mathcal{B}g_2 \rangle}} = \frac{\langle g_{31}, \mathcal{B}g_{32} \rangle}{\sqrt{\langle g_{31}, \mathcal{B}g_{31} \rangle \langle g_{32}, \mathcal{B}g_{32} \rangle}} = \cos \gamma(\text{konstant}) . \quad (\text{D.14})$$

Das ist eine Gleichung vierter Ordnung, die Peripherie ist kein Kegelschnitt (Abb. 9.13), im Gegensatz zu dem entarteten Fall der euklidischen krümmungsfreien Geometrie. Gleichung (D.14) kann auch mit \mathcal{A} geschrieben werden. Bei der Ersetzung $B^{ij} = \epsilon^{ikl} A_{km} \epsilon^{jmn} A_{ln}$ ergibt sich die schöne Formel

$$\begin{aligned} & \langle Q, (\mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}Q_1 \circ Q_2 \mathcal{A}}{Q_1 \mathcal{A} Q_2}) Q \rangle \langle Q, (\mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}Q_1 \circ Q_2 \mathcal{A}}{Q_1 \mathcal{A} Q_2}) Q \rangle \\ &= \lambda \langle Q, (\mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}Q_1 \circ Q_1 \mathcal{A}}{Q_1 \mathcal{A} Q_1}) Q \rangle \langle Q, (\mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}Q_2 \circ Q_2 \mathcal{A}}{Q_2 \mathcal{A} Q_2}) Q \rangle . \end{aligned}$$

Dabei muß der Wert von λ dadurch bestimmt werden, daß die Kurve durch den dritten Punkt Q_3 gehen soll. Zerlegt man in der Formel Q als Linearkombination $Q = \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \mu_3 Q_3$, dann ergibt sich für jeden Wert von μ_1/μ_3 eine quadratische Gleichung für μ_2/μ_3 . Auf jedem Strahl durch Q_1 liegen zwei Punkte der Kurve (Abb. 9.13).

D.5 Zwei Beispiele

Die Verwandtschaft der Geometrien der Ebene soll an zwei Beispielen erläutert werden, die beide einen besonderen geometrischen Reiz haben. Wir verzichten auf die Beweise, die wirkliches Kopferbrechen erfordern, und demonstrieren nur die Formulierung mit projektiven Mitteln.

Unser erstes Beispiel ist ein verblüffender Schnittpunkt. Die **Verbindungsli-nien der Schnittpunkte von drei Kegelschnitten** schneiden sich in einem Punkt, wenn zwei dieser Kegelschnitte jeweils einen Brennpunkt gemeinsam haben (Abb. D.9).

Zunächst müssen wir wissen, was ein Brennpunkt ist. Wie wir im vorigen Abschnitt geschrieben haben, ist der Kreis ein Kegelschnitt \mathcal{K} mit einem Mittelpunkt M . Jede Sehne g durch diesen Mittelpunkt (d.h., $\langle g, M \rangle = 0$) hat einen Pol $P_{\mathcal{K}}[g]$ bezüglich \mathcal{K} und einen Pol $P_{\mathcal{B}}[g]$ bezüglich \mathcal{B} . Beide Pole fallen für einen Kreis zusammen. Wir müssen nun mit solchen projektiven Begriffen auch die Brennpunkte F_1, F_2 von Ellipsen und Hyperbeln \mathcal{H} definieren. In der euklidischen Geometrie lernen wir, daß die Sehnen g durch einen Brennpunkt F (d.h., $\langle g, F \rangle = 0$) senkrecht auf der Verbindungslinie des Pols $P_{\mathcal{H}}[g]$ mit dem Brennpunkt F stehen. Senkrechtstehen ist nun in der allgemeinen metrisch-projektiven Geometrie aber das Passieren des Pols $P_{\mathcal{B}}[g]$. Die Brennpunkte F eines Kegelschnitts $\langle Q, \mathcal{H}Q \rangle = 0$ müssen also dadurch definiert werden, daß die beiden Pole $P_{\mathcal{B}}[g]$ und $P_{\mathcal{H}}[g]$ jeder Sehne durch einen Brennpunkt mit diesem selbst kollinear sind. Da das für beide Brennpunkte gelten soll, muß also

$$\mathcal{H}_{12}^{-1} g = \mathcal{B}g + \alpha F_1$$

für $\langle g, F_1 \rangle = 0$ und

$$\mathcal{H}_{12}^{-1}g = \mathcal{B}g + \beta F_2$$

für $\langle g, F_2 \rangle = 0$ gelten. Daraus folgt

$$\mathcal{H}^{-1}[\kappa, F_1, F_2] = \mathcal{B} + \frac{\kappa}{\langle F_1, \mathcal{B}^{-1}F_2 \rangle} (F_1 \circ F_2 + F_2 \circ F_1) \quad (\text{D.15})$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\kappa, F_1, F_2] &= \mathcal{A} - \lambda\mu \frac{\mathcal{A}F_1 \circ \mathcal{A}F_2 + \mathcal{A}F_2 \circ \mathcal{A}F_1}{\langle F_1, \mathcal{A}F_2 \rangle} \\ &\quad + \lambda^2\nu \left(\frac{\mathcal{A}F_1 \circ \mathcal{A}F_1}{\langle F_1, \mathcal{A}F_1 \rangle} + \frac{\mathcal{A}F_2 \circ \mathcal{A}F_2}{\langle F_2, \mathcal{A}F_2 \rangle} \right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\langle F_1, \mathcal{A}F_2 \rangle^2}{\langle F_1, \mathcal{A}F_2 \rangle^2 - \lambda^2 \langle F_1, \mathcal{A}F_1 \rangle \langle F_2, \mathcal{A}F_2 \rangle}, \\ \nu &= \frac{\langle F_1, \mathcal{A}F_1 \rangle \langle F_2, \mathcal{A}F_2 \rangle}{\langle F_1, \mathcal{A}F_2 \rangle^2 - \lambda^2 \langle F_1, \mathcal{A}F_1 \rangle \langle F_2, \mathcal{A}F_2 \rangle} \end{aligned}$$

und $\lambda = \kappa/(1+\kappa)$. Fallen F_1 und F_2 zusammen, ergibt sich die Gleichung des Kreises. $\kappa < 1$ entspricht der Ellipse der euklidischen Geometrie, $\kappa > 1$ der Hyperbel.

Nun seien F_1, F_2, F_3 drei Brennpunkte und $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}[\kappa_1, F_2, F_3]$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}[\kappa_2, F_3, F_1]$, $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}[\kappa_3, F_1, F_2]$ drei Kegelschnitte, die jeden Brennpunkt gemeinsam mit einem anderen der drei haben. Diese Kegelschnitte haben je zwei Directricen, die Polaren der Brennpunkte ($d_{12} = \mathcal{H}_1 F_2$, und so fort). Zwei Kegelschnitte haben jeweils zwei reelle Schnittpunkte (\mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 schneiden sich in Q_{31} und Q_{32} , \mathcal{H}_2 und \mathcal{H}_3 in Q_{11} und Q_{12} , schließlich \mathcal{H}_3 und \mathcal{H}_1 in Q_{21} und Q_{22}), durch die eine Sehne gelegt werden kann ($g_1 = Q_{11} \times Q_{12}$, $g_2 = Q_{21} \times Q_{22}$, $g_3 = Q_{31} \times Q_{32}$). Die drei Sehnen schneiden sich in einem Punkt, d.h., $[g_1, g_2, g_3] = 0$.

In der euklidischen (wie auch in der Minkowski-Geometrie) kann man zeigen, daß jede Sehne durch *zwei* Schnittpunkte von Directricen geht, also etwa g_1 durch $Q_1 = d_{21} \times d_{31}$ und $R_1 = d_{23} \times d_{32}$. Mit der Darstellung $g_1 = Q_1 \times R_1$ kann man dann mit einfacher Algebra zeigen, daß die drei Sehnen durch einen Punkt gehen. Im nichteuklidischen Fall geht die Sehnen g_k noch durch Q_k , aber nicht mehr durch R_k .

Das zweite Beispiel ist ein berühmtes Problem der antiken griechischen Mathematik. Es ist die **Dreiteilung des Winkels**, eins der klassischen Probleme, das keine allgemeine Lösung auf der Basis einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal besitzt. Man findet die Dreiteilung mit Konstruktionen, die Schnitte aus Kreis und Hyperbel suchen. Wir zeigen hier eine Konstruktion im Minkowski-Raum, die dual zu einer bekannten Konstruktion der euklidischen Ebene ist, und teilen den pseudo-euklidischen Winkel in drei Teile (Abb. D.10). Die Dualität veranlaßt uns, das

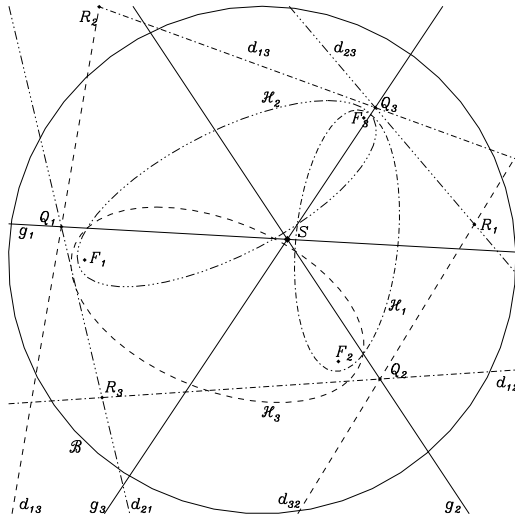


Abbildung D.9: Der Sehnenschnittpunkt dreier Kegelschnitte

Die Abbildung zeigt drei Punkte F_1, F_2, F_3 . Je zwei dieser Punkte seien Brennpunkte eines Kegelschnitts. Zu diesen sind in gleichem Stil die Directricen und deren Schnittpunkte gezeichnet. Die Sehnen g_1, g_2, g_3 durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte schneiden sich in S .

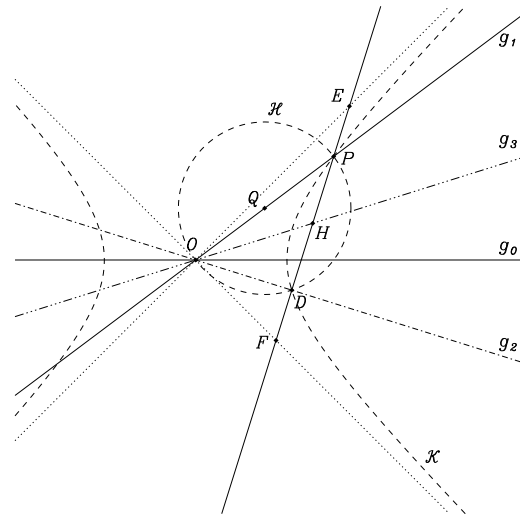


Abbildung D.10: Die Dreiteilung des Winkels

Wir zeigen die Dreiteilung des Winkels in der Minkowski-Geometrie.

Die invarianten Richtungen sind wie üblich gewählt. Der Winkel wird so gelegt, daß die Gerade g_0 die Horizontale ist. Genau dann wird der im Text definierte Kegelschnitt \mathcal{H} nach euklidischem Maß ein Kreis.

Ergebnis in projektiver Form zu fassen. – Aus unserer Sicht ist der Kreis \mathcal{K} die elementare Figur, für die es eine ziemlich einfach strukturierte Gleichung gibt, wenn der absolute Kegelschnitt \mathcal{B} bekannt ist (Gleichung (D.13)). Ist \mathcal{B} nur vom Rang 2, so entartet Gleichung (D.13) zu einer leeren Gleichung. Wir müssen also dann \mathcal{B} durch einen kleinen Term ergänzen, der den vollen Rang herstellt, invertieren und in der Gleichung (D.13) den Grenzübergang herstellen, in dem dieser Zusatzterm verschwindet. Der führende Term wird dann durchaus trivial, aber der nächste liefert wieder eine richtige Gleichung. Wir können sie wie folgt darstellen. Ist \mathcal{B} nur vom Rang 2, so definiert \mathcal{B} eine absolute Polare p , mit deren Hilfe \mathcal{B} als Derivat einer Matrix \mathcal{B}^* vollen Ranges dargestellt werden kann:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^* - \frac{\mathcal{B}^* p \circ \mathcal{B}^* p}{\langle p, \mathcal{B}^* p \rangle} .$$

Diese kann gewöhnlich invertiert werden, $\mathcal{A}^* \mathcal{B}^* = \mathcal{E}$. Wir finden mit der Definition

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^* - \frac{p \circ p}{\langle p, \mathcal{B}^* p \rangle}$$

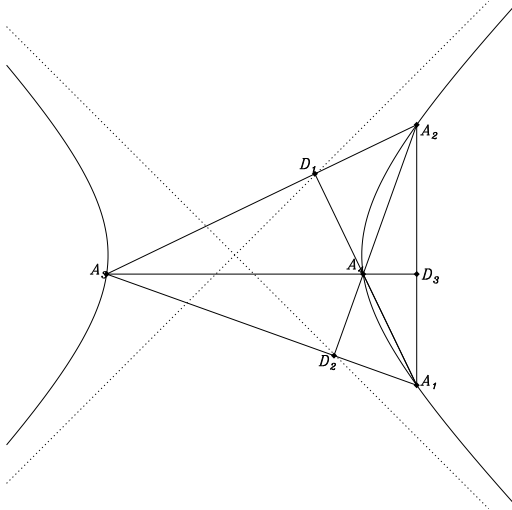


Abbildung D.11: Hyperbel und euklidischer Höhenschnittpunkt

Der euklidische Höhenschnittpunkt eines Dreiecks liegt auf dem pseudo-euklidischen Umkreis, wenn dieser eine gleichseitige Hyperbel ist. – Und als Korollar: *Alle Kegelschnitte durch ABCH sind gleichseitige Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf dem Feuerbach-Kreis liegen.*

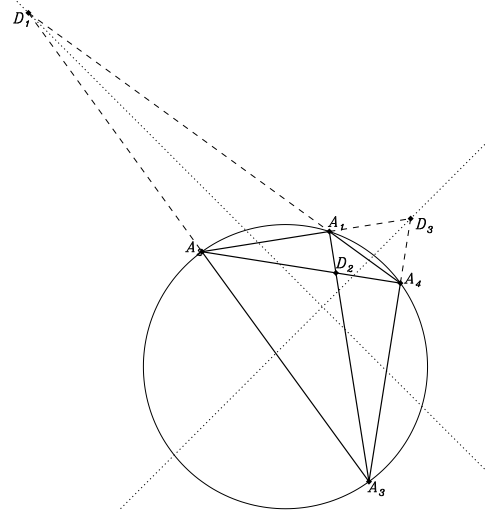


Abbildung D.12: Kreis und pseudo-euklidischer Höhenschnittpunkt

Der pseudo-euklidische Höhenschnittpunkt eines Dreiecks liegt auf dem euklidischen Umkreis, wenn die ausgezeichneten Richtungen, die pseudo-euklidisch auf sich selbst senkrecht stehen, euklidisch aufeinander senkrecht stehen.

wieder eine Matrix mit Rang 2, mit deren Hilfe die Kreisgleichung $\langle Q, \mathcal{K}Q \rangle = 0$ mit

$$\mathcal{K} = \mathcal{A}_1 + 2 \frac{\langle Q_1, \mathcal{A}_1 M \rangle}{\langle p, Q_1 \rangle \langle p, M \rangle} p \circ p - \frac{1}{\langle p, M \rangle} (p \circ M \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 M \circ p) - \frac{\langle Q_1, \mathcal{A}_1 Q_1 \rangle}{\langle p, Q_1 \rangle^2} p \circ p$$

geschrieben werden kann.

In Abbildung D.10 rechnen wir mit einem Minkowskischen Maß \mathcal{B} . Der (gestrichelt gezeichnete) Kegelschnitt \mathcal{K} um den Scheitelpunkt O des Winkels aus den Geraden g_0 und g_1 , der nach euklidischen Maßstäben beurteilt eine Hyperbel ist, ist in dem durch \mathcal{B} gegebenen Maß ein Kreis. Er schneidet g_1 im Punkte P . Nun wird um den Mittelpunkt Q von OP ein Kegelschnitt \mathcal{H} durch P gelegt, der im euklidischen Fall eine Hyperbel, hier also ein (nach euklidischen Maßstäben beurteilter) Kreis ist. Diesen Kegelschnitt definieren wir unabhängig von der speziellen Geometrie als Konstrukt aus \mathcal{B} und g_0 . Während der Kreis \mathcal{K} mit \mathcal{B} konstruiert wird, suchen wir den Kegelschnitt \mathcal{H} als Kreis auf der Basis einer Matrix

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} - \frac{\lambda}{\langle g_0, \mathcal{B}g_0 \rangle} \mathcal{B}g_0 \circ g_0 \mathcal{B} .$$

Wir bestimmen λ so, daß die beiden \mathcal{B}_1 entsprechenden Asymptoten (definiert durch $\langle e, \mathcal{B}_1 e \rangle = 0$, in Abb. D.10 nicht reell) bezüglich \mathcal{B} senkrecht aufeinander stehen (d.h.,

$\langle e_1, \mathcal{B}e_2 \rangle = 0$). Es ergibt sich dann immer $\lambda = 2$. Schneiden wir nun \mathcal{K} (den \mathcal{B} -Kreis durch P um O) mit \mathcal{H} (dem \mathcal{B}_1 -Kreis durch P um Q), erhalten wir weitere reelle Schnittpunkte D , im euklidischen Fall drei, im pseudo-euklidischen Fall einen. Man kann nun zeigen, daß die Geraden $g_2 = O \times D$ in g_1 übergehen, wenn sie erst an g_0 und dann am Ergebnis $g_3 = \mathcal{S}_{g_0}[g_2]$ gespiegelt werden. Damit ist $3\angle[g_2, g_0] = \angle[g_0, g_1]$. Im euklidischen Fall gilt dies natürlich nur modulo 2π .

Abbildung D.10 illustriert das Verfahren. Wir legen den durch \mathcal{B} bestimmten pseudo-euklidischen Kreis \mathcal{K} als Hyperbel um den Vertex O und finden auf dem zweiten Schenkel den Punkt P . Durch den Mittelpunkt Q der Strecke OP legen wir den (euklidischen) Kreis \mathcal{H} und finden den Schnittpunkt D . Nun ziehen wir die Sehne PD , die das Asymptotenkreuz in E und F schneidet und halbieren sie mit dem Punkt H , der auch AB halbiert, wie wir von der Hyperbel wissen. Die Gerade g_3 halbiert also den Winkel $\angle[g_2, g_1]$ nach pseudo-euklidischem Maß. Wir müssen nun nur noch zeigen, daß g_0 den Winkel $\angle[g_3, g_2]$ nach pseudo-euklidischem Maß teilt. g_0 ist aber die horizontale Achse und teilt deshalb gerade dann $\angle[g_3, g_2]$ auch nach euklidischem Maß. In diesem rechnen wir weiter. Der Winkel $\angle ODP$ ist nach Thales ein rechter Winkel, $\angle FOE$ ist es nach Voraussetzung (genauer wegen der Wahl von \mathcal{B} und \mathcal{B}_1). Deshalb gilt $\angle FOD = \angle FEO$. Andererseits sind nach euklidischem Maß OH und HE gleich lang, also $\angle FEO = \angle HOE$. Damit ist $\angle FOD = \angle HOE$, und g_0 halbiert nicht nur $\angle FOE$, sondern auch $\angle DOH$. Damit ist nach euklidischem wie pseudo-euklidischem Maß $\angle[g_2, g_0] = \angle[g_0, g_3]$. Nach pseudo-euklidischem Maß war aber $\angle[g_2, g_3] = \angle[g_3, g_1]$. Deshalb ist nach pseudo-euklidischem Maß nun $3\angle[g_2, g_0] = \angle[g_0, g_1]$.

Die Dreiteilung des Winkels ist eine Aufgabe jenseits der Lösbarkeit mit Zirkel und Lineal allein. Das liegt in der euklidischen wie in der pseudo-euklidischen Geometrie am Fehlen eines absoluten Pols. In der Galilei-Geometrie ist die Dreiteilung des Winkels äquivalent der Dreiteilung einer Strecke und mit Zirkel und Lineal allein ausführbar. Dual dazu finden wir, daß die Dreiteilung einer Strecke nicht mehr mit Zirkel und Lineal allein zu bewältigen ist, wenn es keine absolute Polare gibt, also etwa auf der Kugel (d.h. in der elliptischen Geometrie).

Es gibt auch einfachere Beispiele der Verwicklung von Kreis und gleichseitiger Hyperbel als die Dreiteilung des Winkels. Die Abbildungen D.11 und D.12 zeigen, daß eine Hyperbel auch in einer einfachen euklidischen Konstruktion und ein Kreis in der dualen pseudo-euklidischen Konstruktion gefunden werden kann. Konstruieren wir den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks nach der euklidischen Regel, liegt er auf allen gleichseitigen Hyperbeln, die durch die Dreieckspunkte gehen. Dual dazu können wir den Höhenschnittpunkt nach der pseudo-euklidischen Regel bestimmen. Dann liegt er auf dem euklidischen Umkreis des Dreiecks. Wir lassen den Beweis dem Leser.

Anhang E

Die metrische Ebene

E.1 Klassifikation

Wir wollen hier die formale Grundlage für die Darstellung in Kapitel 9 entwickeln¹. Dazu erweitern wir zunächst die projektive Ebene auf den projektiven Raum. Dessen Punkte und Ebenen sind nun Schnitte mit einem Geradenbüschel bzw. einem Raumbüschel, das von einem Zentrum im vierdimensionalen linearen Raum getragen wird. Jeder Punkt im dreidimensionalen projektiven Raum hat nun vier homogene Koordinaten, $Q = (Q^1, Q^2, Q^3, Q^4)$, und die gewöhnlichen Koordinaten erhalten wir etwa durch $(\xi, \eta, \zeta) = (Q^1/Q^4, Q^2/Q^4, Q^3/Q^4)$. Das zum Punkt duale Gebilde ist nicht mehr die Gerade, sondern die Ebene. Geraden kann man sowohl als Schnitt zweier Ebenen oder als Verbindung zweier Punkte darstellen. Eine Ebene hat ebenfalls vier homogene Koordinaten, $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Der Punkt Q liegt in der Ebene e , wenn das Skalarprodukt der Koordinatenquadrupel verschwindet, $\langle e, Q \rangle = e_k Q^k = 0$.

Dem Kegelschnitt entspricht nun im dreidimensionalen projektiven Raum ein Gebilde, das wir allgemein eine *Quadrik* nennen. Eine solche Quadrik kann ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid sein, diese Namen sind aber der Anschauung im euklidischen Raum entlehnt. Projektiv unterscheiden sich die Quadriken nur durch ihre Signatur, d.h. durch die Differenz in der Zahl der positiven und negativen Diagonalelemente in einer Diagonaldarstellung der Matrix K_{lm} . Auch dieser Unterschied ist für uns ohne Belang. Wir wollen hier die Quadrik mit Hauptachsen parallel den cartesischen Koordinatenlinien darstellen und wählen deshalb

$$\frac{(x - \xi t)^2}{a^2} + \frac{(y - \eta t)^2}{b^2} + \frac{(z - \zeta t)^2}{c^2} = \frac{t^2}{d^2}.$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $Z = [\xi, \eta, \zeta, 1]$, die Hauptachsenquadrate sind a^2/d^2 , b^2/d^2 und c^2/d^2 . Sind diese Werte alle positiv, ist die Quadrik in der gewählten

¹Wir benutzen die Summationskonvention.

Darstellung ein Ellipsoid. Die dreidimensionale Polarität ist dann durch die Matrizen

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{\xi}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & -\frac{\eta}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & -\frac{\zeta}{c^2} \\ -\frac{\xi}{a^2} & -\frac{\eta}{b^2} & -\frac{\zeta}{c^2} & -\frac{1}{d^2} + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \end{pmatrix}, \quad \det \mathcal{A} = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2} \quad (\text{E.1})$$

und

$$\mathcal{B}^* = \begin{pmatrix} a^2 - d^2 \xi^2 & -d^2 \xi \eta & -d^2 \xi \zeta & -d^2 \xi \\ -d^2 \eta \xi & b^2 - d^2 \eta^2 & -d^2 \eta \zeta & -d^2 \eta \\ -d^2 \zeta \xi & -d^2 \zeta \eta & c^2 - d^2 \zeta^2 & -d^2 \zeta \\ -d^2 \xi & -d^2 \eta & -d^2 \zeta & -d^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

darzustellen. Ein Punkt Q hat die polare Ebene $\pi[Q] = \mathcal{A}^*Q$, eine Ebene γ hat den Pol $P[\gamma] = \mathcal{B}^*\gamma$.

Wir setzen nun $d = 1$. Der Schnitt mit der Ebene $z = 0$ ist ein Kegelschnitt der Gleichung

$$\frac{(x - \xi t)^2}{a^2} + \frac{(y - \eta t)^2}{b^2} = t^2 \left(1 - \frac{\zeta^2}{c^2}\right).$$

Ist $\zeta < c$, schneidet die Quadrik die Ebene im Reellen nicht. Wir können

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{\xi}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & -\frac{\eta}{b^2} \\ -\frac{\xi}{a^2} & -\frac{\eta}{b^2} & -1 + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \end{pmatrix}, \quad \det \mathcal{A} = -\frac{c^2 - \zeta^2}{a^2 b^2 c^2}$$

schreiben. Für \mathcal{B} ist das eigentlich komplizierter, aber im nichtentarteten Fall haben wir einfach das Inverse von \mathcal{A} zu bilden, d.h.,

$$\mathcal{B} = -\frac{c^2}{c^2 - \zeta^2} \begin{pmatrix} a^2(-1 + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}) & \xi \eta & \xi \\ \xi \eta & b^2(-1 + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}) & \eta \\ \xi & \eta & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir überzeugen uns, daß die polare Ebene $\pi[Q] = \mathcal{A}^*Q$ eines Punktes in der Ebene $z = 0$ diese Ebene in der Polaren $p[Q] = \mathcal{A}Q$ schneidet. Schließlich gilt die Eigenschaft der Punkte der polaren Ebene, mit dem Aufpunkt Q die beiden Schnittpunkte der Verbindungsgeraden mit der Quadrik im Raum harmonisch zu teilen auch für die Punkte, die auf dem Schnitt der polaren Ebene mit der Zeichenebene liegen. – Wir überzeugen uns, daß die polaren Ebenen $\pi[Q] = \mathcal{A}^*Q$ der Punkte Q einer Geraden g in der Ebene $z = 0$ alle eine Gerade $p[g]$ gemeinsam haben, die diese Ebene $z = 0$ im Pol $P[g] = \mathcal{B}g$ der Geraden schneidet. Wählen wir auf g zwei Punkte, schneiden sich deren polare Ebenen in einer Geraden. Diese Gerade erweist sich als unabhängig von der Wahl der Punkte, solange sie auf der Geraden g liegen. Es ist die Polare $p[g]$ der Geraden g .

Im Raum können also Geraden zueinander polar sein². Die gefundene Gerade $p[g]$ schneidet die Ebene $z = 0$ im Pol $P[g] = \mathcal{B}g$ der Geraden. Wir können dual dazu auch so vorgehen, daß wir erst die Ebenen durch die Gerade g bestimmen und dann die Pole dieser Ebenen aufzusuchen. Dies Pole liegen im nichtentarteten Fall wieder auf der bereits konstruierten polaren Geraden. – Wenn \mathcal{B} nicht entartet ist, ist jeder Punkt Pol zu einer Geraden, die nun seine Polare heißt: $p[Q] = \mathcal{A}Q$, und $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}$. Im Entartungsfall ($\det \mathcal{B} = 0$) ist auch \mathcal{A} entartet ($\det \mathcal{A} = 0$ und $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0$). Dann bestimmen sich \mathcal{A} und \mathcal{B} wechselseitig nur noch unvollständig.

Wir haben folgende Fälle zu entscheiden:

1. Der die Polarität definierende Kegelschnitt ist reell und nicht entartet. Im Dreidimensionalen heißt das, wir können die Quadrik durch eine Kugel darstellen, die unsere Zeichenebene schneidet. Statt der Kugel könnten wir auch ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid nehmen, für die projektiven Beziehungen ist das ohne Wirkung. Die Polarität läßt sich durch eine reelle Konstruktion mit dem reellen Kegelschnitt herstellen, und der Rückgriff auf den dreidimensionalen Raum nicht unmittelbar erforderlich. Allerdings hat der reelle Kegelschnitt die Eigenschaft, Punkte und Geraden in invariante Untermengen einzuteilen. Das sind die Transitivitätsgebiete, die wir schon oft beschrieben haben. Es ergeben sich drei Unterfälle.
 - (a) Wir wählen die Geraden als Erzeugendensystem, die den Kegelschnitt schneiden, und können dann die Punkte im Innern des Kegelschnitts erzeugen. Wir erhalten so das Kleinsche Modell der nichteuklidischen Geometrie (Lobachevski-Geometrie)
 - (b) Wir wählen die Geraden als Erzeugendensystem, die den Kegelschnitt schneiden, und die Punkte im Außengebiet des Kegelschnitts. Wir erhalten dann das Modell der deSitter-Geometrie. Zeitartige Geraden schneiden den Kegelschnitt, raumartige Geraden meiden ihn.
 - (c) Wir wählen die Geraden als Erzeugendensystem, die den Kegelschnitt *nicht* schneiden, und die Punkte im Außengebiet des Kegelschnitts. Wir

²Das liegt daran, daß der dreidimensionale projektive Raum durch den vierdimensionalen homogenen Raum dargestellt werden muß, in dem die Geraden h nicht mehr durch *eine* lineare Gleichung, sondern durch *zwei* dargestellt werden, denen die Form

$$h_{ik}x^k = 0$$

mit einer antisymmetrischen Koeffizientenmatrix h_{ik} gegeben werden kann. Mit dem vierstelligen Permutationssymbol ϵ_{iklm} (numerisch gleich mit ϵ^{iklm} und der Reziprozität $\epsilon_{iklm}\epsilon^{ikrs} = 2(\delta_i^r\delta_m^s - \delta_m^r\delta_i^s)$) kann eine Gerade durch zwei Punkte Q und R mit dem Koeffizientenschema $h_{ik}[Q, R] = \epsilon_{iklm}Q^lR^m$ dargestellt werden. Die Schnittgerade zweier Ebenen α und β ist $h_{ik}[\alpha, \beta] = \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i$. Unterstellen wir die Polarität $\alpha = \pi[Q]$ und $\beta = \pi[R]$ finden wir durch Einsetzen für $j = p[h]$ die Formel

$$j_{ik} = (A_{ir}^* A_{ks}^* \epsilon^{lmrs}) h_{lm} .$$

erhalten dann das Modell der Anti-deSitter-Geometrie. Zeitartige Geraden meiden den Kegelschnitt, raumartige Geraden schneiden ihn.

Jedesmal erhalten wir modifizierte metrische Beziehungen. Die Quadrik im dreidimensionalen Raum könnte auch entartet sein, wenn sie nur eine nichtentartete Schnittkurve hat, also etwa ein normaler Kegel, der nicht im Zentrum geschnitten wird. In Kapitel 7 haben wir die Lobachevski-Geometrie gerade so eingeführt.

2. Der die Polarität definierende Kegelschnitt ist nicht reell, aber auch nicht entartet. Diesen Fall stellen wir reell im dreidimensionalen projektiven Raum dar, indem wir dort eine Quadrik wählen, die die Zeichenebene nicht schneidet. Wir erhalten dann das Modell der elliptischen (sphärischen) Geometrie.
3. Der die Polarität definierende Kegelschnitt hat nur einen reellen Punkt P . Diesen Fall stellen wir reell im dreidimensionalen projektiven Raum dar, indem wir dort eine Quadrik wählen, die die Zeichenebene berührt. Wir erhalten dann das Modell der antieuklidischen Geometrie. Wie im ersten Fall kann auch hier die Quadrik in bestimmter Form entartet sein: Der Punkt könnte das Zentrum eines Doppelkegels sein. Der Punkt P wird Pol aller Geraden der Ebene, und alle Polaren gehen durch diesen Pol. Im Polarenbüschel ist eine Involution definiert, die keine Fixstrahlen hat.
4. Der die Polarität definierende Kegelschnitt ist zu einem reellen Punktepaar entartet. Wir erhalten dann das Modell der pseudoeuklidischen Geometrie (Minkowski-Geometrie). Alle Punkte haben eine gemeinsame Polare, die Ferngerade in der cartesischen Darstellung. Alle Pole liegen auf dieser Polaren, auf der eine Involution definiert ist, die zwei Fixpunkte hat: die reellen Punkte des definierenden Kegelschnitts.
5. Der die Polarität definierende Kegelschnitt ist zu einem Punktepaar entartet, das nicht reell ist, das aber eine reelle Verbindung hat. Wir erhalten dann das Modell der euklidischen Geometrie. Alle Punkte haben eine gemeinsame Polare, die Ferngerade in der cartesischen Darstellung. Alle Pole liegen auf dieser Polaren, auf der eine Involution definiert ist, die keine reellen Fixpunkte hat.
6. Der die Polarität definierende Kegelschnitt ist zu einem reellen Doppelpunkt entartet, das heißt, er hat dort auch eine reelle Tangente. Wir erhalten dann das Modell der Galilei-Geometrie. Alle Punkte haben eine gemeinsame Polare, die Ferngerade in der cartesischen Darstellung. Alle Geraden haben einen gemeinsamen Pol, den reellen Punkt des Kegelschnitts.
7. Der die Polarität definierende Kegelschnitt ist zu einem reellen Geradenpaar entartet. Alle Geraden haben einen gemeinsamen Pol, den Schnittpunkt, durch

den alle Polaren gehen. Im Polarenbüschel ist eine Involution definiert, die zwei Fixstrahlen hat, nämlich das Geradenpaar (Anti-Minkowski-Geometrie).

Wir wollen nun diese neun Fälle formalisieren. Dazu legen wir das Zentrum der Quadrik zunächst in den Punkt $[x, y, z, t] = [0, 0, 1, 1]$. Damit lassen sich alle besprochenen Fälle darstellen bis auf einen: wenn der Schnitt mit der Ebene $z = 0$ ein Geradenpaar sein soll. Dieser Fall ist nur mit einem Zentrum $[x, y, z, t] = [0, 0, 0, 1]$ zu behandeln. Wir schreiben also zunächst

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & -1 + \frac{1}{c^2} \end{pmatrix}, \quad \det \mathcal{A} = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2}$$

und

$$\mathcal{B}^* = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In der Zeichenebene entstehen die Ausdrücke

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} b^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 b^2 (1 - c^2) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a^2(-1 + \frac{1}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & b^2(-1 + \frac{1}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} a^2(1 - c^2) & 0 & 0 \\ 0 & b^2(1 - c^2) & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Wenn \mathcal{A}^* eine Kugel ist, $a = b = c$, und diese die Ebene schneidet, $c > 1$, entstehen indefinite Matrizen \mathcal{A} und \mathcal{B} , die (bis auf den in homogenen Koordinaten immer freien Faktor) zueinander invers sind: $\mathcal{A}\mathcal{B} \propto \mathcal{E}$. Schneidet die Kugel die Ebene nicht, $c < 1$, sind \mathcal{A} und \mathcal{B} beide definit. Berührt die Kugel die Ebene, $c = 1$, hat \mathcal{B} nur noch den Rang 1 und \mathcal{A} den Rang 2.

Nun betrachten wir den Grenzfall $a = c = 1$, aber $b \rightarrow 0$. Die Kugel wird also plattgedrückt. Wichtig ist, daß die Ebene, auf die das geschieht, die Zeichenebene schneidet. Andernfalls ergibt sich auch in der Grenze nur der bereits gesehene zweite Fall. Die Kugel wird also ein Diskus. Ist $c < 1$, schneidet er die Ebene nicht, und wir erhalten \mathcal{A} vom Rang 1 und \mathcal{B} vom Rang 2 und semidefinit. Ist $c > 1$, schneidet er die Ebene längs einer von 2 reellen Punkten begrenzten Strecke. \mathcal{A} bleibt vom Rang 1, \mathcal{B} vom Rang 2, aber \mathcal{B} ist nun indefinit. Berührt der Diskus die Ebene, $c = 1$, sind \mathcal{A} und \mathcal{B} vom Rang 1. In allen drei Fällen ist die Gerade $y = 0$ durch \mathcal{A}

definiert: Es ist das Bild der Ferngeraden der euklidischen Geometrie, der Minkowski-Geometrie und der Galilei-Geometrie. Danach bleibt nur noch ein Fall übrig. Wir setzen im dreidimensionalen Raum einen Kegel an, dessen Achse in der Zeichenebene liegt. Dazu ersetzen wir in den Formeln (E.1) und (E.2) b^2 durch $-b^2$, um den Vorzeichenwechsel des Koeffizienten anzuzeigen, und lassen d^2 gegen Unendlich gehen. Es ergeben sich nun die Formeln

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d^2} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2 b^2}{d^2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -d^2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{d^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{d^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Denken wir an die Dualität zwischen Geraden und Punkten in der projektiven Geometrie, entspricht der Vertauschung beider die Vertauschung der Rollen von \mathcal{A} und \mathcal{B} . In diesem Sinne rechtfertigen sich die Bezeichnungen für die antieuklidische, die anti-Minkowskische, die Anti-Lobachevski-Geometrie.

Wir schließen mit der Betrachtung des *Sinussatzes* und zeigen ihn am Beispiel der Dreiecke aus zeitartigen Geraden in der deSitter-Geometrie (Abb. 7.24). Diese wird auf die (Pseudo-)Kugel im Dreidimensionalen gezeichnet, damit alle Bewegungen der Geometrie (Pseudo-)Drehungen werden. Die Transformationsmatrizen im Dreidimensionalen haben dann die Determinante 1, und das Spatprodukt dreier Ortsvektoren $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]$ ist invariant. – Wir wählen nun den Äquator so, daß er den Punkt A passiert und daß B auf dem Meridian durch A liegt (Abb. E.1). Wir zeichnen den Tangential-Einheitsvektor \vec{AT}_{AB} bei A in Richtung B und finden eine Komponentenzerlegung

$$\vec{OB} = \vec{OA} \Gamma[c] + \vec{AT}_{AB} \Pi[c] , \text{ d.h., } \vec{OB}^* = \vec{OA} + \vec{AT}_{AB} \Pi[c] ,$$

wobei c der Zentralwinkel, also die Länge der Geodäte AB ist. Der Meridianschnitt ist hier eine *pseudoeuklidische* Ebene, deshalb ist $\Gamma[c] = \cosh c$ und $\Pi[c] = \sinh c$. Diese Aufspaltung enthält nur invariant beschriebene Stücke, ist also selbst invariant (d.h., unabhängig von der speziell gewählten Lage der Strecke AB). Wir können deshalb allgemein auch $\vec{OC}^* = \vec{OA} + \vec{AT}_{AC} \Pi[b]$ setzen. – Wir werten nun das Spatprodukt $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]$ aus. Es ist gleich dem zweifachen Volumen der Pyramide $OABC$. Die ist aber volumengleich der Pyramide OAB^*C^* , weil sich beim Ersetzen von B durch B^* und von C durch C^* die Grundfläche $OAB = OAB^*$ und die Höhe C^*G nicht ändern. Nun ist $AB^* = \Pi[c]$ und $AC^* = \Pi[b]$. Wir setzen $C^*G = AC^* \Sigma[\alpha]$. In unserem Falle ist auch die Tangentialebene pseudoeuklidisch, es gilt deshalb $\Sigma[\alpha] = \sinh \alpha$. Wir finden

$$[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = 2 \Pi[b] \Pi[c] \Sigma[\alpha]$$

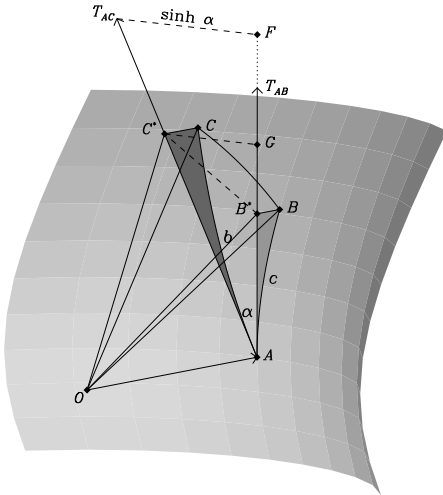


Abbildung E.1: Die charakteristischen Funktionen. I.

Wir sehen das aufgeschnittene Hyperboloid des Radius 1 mit einer Tangentialebene im Punkte A. Die Seite $c = AB$ des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt im Meridian. AT_{AB} und AT_{AC} sind Einheitsvektoren in der Tangentialebene. Es gilt hier $AC^* = \sinh b$, $AB^* = \sinh c$ und $C^*G/AC^* = \sinh \alpha$.

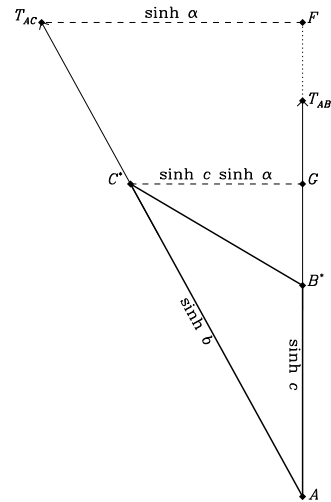


Abbildung E.2: Die charakteristischen Funktionen. II.

Wir werten das Dreieck $\triangle AB^*C^*$ in der Tangentialebene aus. Das Volumen der Pyramide OAB^*C^* ist durch $2V^* = [\vec{OA}, \vec{OB}^*, \vec{OC}^*] = \sinh b \sinh c \sinh \alpha$ gegeben.

Sind alle drei Seiten des Dreiecks zeitartig, kann wieder wegen der Invarianz des Spatprodukts jeder der drei Punkte eines Dreiecks als Bezugspunkt gewählt werden, und es gilt zyklisch $\Pi[b] \Pi[c] \Sigma[\alpha] = \Pi[c] \Pi[a] \Sigma[\beta] = \Pi[a] \Pi[b] \Sigma[\gamma]$ oder

$$\Pi[a] : \Pi[b] : \Pi[c] = \Sigma[\alpha] : \Sigma[\beta] : \Sigma[\gamma] . \tag{E.3}$$

Sehen wir die neun Geometrien als solche Zentralprojektionen an, dann unterscheiden sie sich je nach Charakter der Meridianebenen und der Tangentialebenen. Bei positiver Krümmung der Geometrie der Oberfläche sind die Meridianebenen euklidisch ($\Pi[a] = \sin a$, Abb. 7.17), bei negativer Krümmung pseudoeuklidisch ($\Pi[a] = \sinh a$, Abb. 7.19), ohne Krümmung sind sie Galileisch ($\Pi[a] = a$). Die Tangentialebenen sind euklidisch ($\Sigma[\alpha] = \sin \alpha$) für die Geometrien mit gewöhnlicher Dreiecksungleichung (Abb. 7.8, 7.9), sie sind pseudoeuklidisch ($\Sigma[\alpha] = \sinh \alpha$) für die antihyperbolische (Abb. 7.27), die Minkowski- und die deSitter-Geometrie (Abb. 7.25), sie sind Galileisch ($\Sigma[\alpha] = \alpha$) für die antieuklidische, die anti-Minkowskische und die Galilei-Geometrie. Die Funktion $\Pi[r]$ beschreibt die Abhängigkeit des Bogens eines Kreissektors vom Winkel: Ist r die Länge des Radius, so ist der Bogen $b = \alpha \Pi[r]$. Die Funktion $\Sigma[\alpha]$ beschreibt die Abhängigkeit des Sinus s (d.h. der Länge des Lotes vom Startpunkt des Bogens auf den anderen Schenkel des Sektors) vom Bogen,

Tabelle E.1: Tabelle der Signaturen der neun Geometrien der Ebene

	$\Pi[a] = \sin a$	$\Pi[a] = a$	$\Pi[a] = \sinh a$
$\Sigma[\alpha] = \sin \alpha$	Kugel $\mathcal{B} = + + +$ $\mathcal{A} = + + +$	Euklid $\mathcal{B} = 0 + +$ $\mathcal{A} = + 0 0$	Lobachevski $\mathcal{B} = - + +$ $\mathcal{A} = - + +$
$\Sigma[\alpha] = \alpha$	Anti-Euklid $\mathcal{B} = 0 0 +$ $\mathcal{A} = + + 0$	Galilei $\mathcal{B} = 0 0 +$ $\mathcal{A} = + 0 0$	Anti-Minkowski $\mathcal{B} = 0 0 +$ $\mathcal{A} = - + 0$
$\Sigma[\alpha] = \sinh \alpha$	Anti-Lobachevski $\mathcal{B} = - - +$ $\mathcal{A} = + + -$	Minkowski $\mathcal{B} = 0 + -$ $\mathcal{A} = + 0 0$	DeSitter $\mathcal{B} = + - +$ $\mathcal{A} = - + -$

$s = \Pi[r]\Sigma[\alpha]$. So wie je nach Charakter der Meridionalebenen $\Pi[a]$ gleich $\sin a$, a und $\sinh a$ sein kann, finden wir auch $\Sigma[\alpha]$ gleich $\sin \alpha$, α und $\sinh \alpha$ je nach Charakter der Tangentialebenen. Es ergibt sich die Tabelle E.1.

E.2 Die Metrik

Die Metrik der metrisch-projektiven Ebene gestattet die Darstellung des Abstands zweier Punkte in der geschlossenen Form

$$d[A, B] = \frac{1}{2} \ln \mathcal{D}[A, B; K_1[A \times B], K_2[A \times B]] , \quad (\text{E.4})$$

wobei K_1 und K_2 die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AB mit dem absoluten Kegelschnitt sind. Für den Winkel gilt entsprechend

$$\alpha[g, h] = \frac{1}{2} \ln \mathcal{D}[g, h; k_1[g \times h], k_2[g \times h]] .$$

Die Metrik entartet, wenn $K_1 \rightarrow K_2$. Dann bleibt in der ersten Ordnung

$$K_2 = K_1 + \varepsilon V \rightarrow \mathcal{D}[A, B; K_1, K_1 + \varepsilon V] = 1 + \varepsilon \left(\frac{BV}{BK_1} - \frac{AV}{AK_1} \right)$$

übrig. Falls hier K_1 die Koordinate ∞ bekommt, wird die Entfernung zur Koordinatendifferenz auf der Geraden.

Wir konstruieren nun die Metrik der Geometrien, die in den vorangegangenen Kapiteln untersucht worden sind. Sie schaffen insbesondere den Anschluß an die Betrachtungen der Kosmologie, die sich im allgemeinen auf eine solche metrische Darstellung stützen. – In der zweidimensionalen euklidischen Ebene gilt in cartesianischen Koordinaten

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{und} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

im dreidimensionalen euklidischen Raum. Substituieren wir Polarkoordinaten in der Ebene ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), entsteht

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 . \tag{E.5}$$

Substituieren wir Kugelkoordinaten im Raum ($x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$), finden wir

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \tag{E.6}$$

Der Teil in der Klammer beschreibt, was wir auf der Kugelfläche vorfinden. Wir sehen also, daß im Vergleich mit (E.5) der Ausdruck

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 . \tag{E.7}$$

das Linienelement einer homogen positiv gekrümmten Fläche ist.

In der dreidimensionalen Minkowski-Welt gilt in cartesianischen Koordinaten

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 .$$

Führen wir hier neben den Polarkoordinaten auch noch die kosmologische Zeit ein (dann haben wir das Äquivalent der Kugelkoordinaten), finden wir

$$t = \tau \cosh[\chi] , \quad r = \tau \sinh[\chi] , \quad ds^2 = c^2 d\tau^2 - (c\tau)^2 (d\chi^2 + \sinh^2[\chi] d\varphi^2) .$$

Entfernungen vom Punkt $\chi = 0$, die durch eine feste Koordinate χ markiert sind, werden mit der Zeit immer größer. Das Linienelement beschreibt Milnes Explosionskosmos (Abb. 7.19). Der Teil in der Klammer,

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2[\chi] d\varphi^2 ,$$

beschreibt eine homogen *negativ* gekrümmte Fläche. Ersetzen wir die Winkelkoordinate φ der Kreise um den gewählten Ursprung der Ebene durch die Koordinaten (θ, φ) der Kugeln um den Bezugspunkt im Raum, entsteht das Schema

$$ds^2 = d\chi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad \begin{pmatrix} \text{für positive Krümmung} \\ \text{für Krümmung Null} \\ \text{für negative Krümmung} \end{pmatrix}$$

für das Linienelement homogener Räume.

Ein kosmologisches Modell ist nun eine Welt, die man als homogenen Raum mit zeitlich variablem Maß konzipiert. Das Linienelement der Welt lautet dann³

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2[t](d\chi^2 + r^2[\chi](d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) .$$

Die Funktion $r[\chi]$ kann dabei $\sin \chi$ (Räume positiver Krümmung), χ selbst (ungekrümmte Räume) oder $\sinh \chi$ (Räume negativer Krümmung) sein. Die Funktion $a[t]$, der Expansionsparameter, beschreibt die zeitliche Variabilität des räumlichen Maßes (verglichen mit dem Zeitablauf). Die relative Änderung von a ,

$$H = \frac{1}{a} \frac{da[t]}{dt} ,$$

heißt Expansionsrate. Die Einsteinschen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie reduzieren sich auf die *Friedmann-Gleichung*,

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \Lambda \frac{c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3} \varrho . \quad (\text{E.8})$$

Hier ist k das Vorzeichen der Krümmung, Λ die kosmologische Konstante und ϱ die (mittlere) Massendichte.

Die Kosmen des Kapitels 7 sind die leeren Friedmann-Kosmen ($\varrho = 0$). Die Minkowski-Welt zeigt einen Raum der Krümmung Null ohne Expansion ($k = \Lambda = H = 0$). Der Milne-Kosmos (Abb. 7.18) ist ein Raum negativer Krümmung in linearer Expansion, $k = -1$, $\Lambda = 0$. Er entsteht aus der Minkowski-Welt durch eine andere Wahl *und Interpretation* der Koordinaten, hat aber dieselbe abstrakte Metrik. Der deSitter-Kosmos ist die Oberfläche einer Pseudokugel. Je nach Koordinatenwahl kann er als ungekrümmter exponentiell expandierender Raum (Abb. 7.20) mit dem Linienelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a_0^2 \exp[2H_0 t](d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) ,$$

als positiv gekrümmter kontrahierender und expandierender Raum (Abb. 7.22) mit dem Linienelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a_0^2 \cosh^2[H_0 t](d\chi^2 + \sin^2[\chi](d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))$$

oder als negativ gekrümmter explodierender Raum (Abb. 7.24) mit dem Linienelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a_0^2 \sinh^2[H_0 t](d\chi^2 + \sinh^2[\chi](d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))$$

angesehen werden. Bei anderer Wahl der zeitartigen Richtung entsteht der Anti-deSitter-Kosmos (Abb. 7.26) mit dem Linienelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a_0^2 \cos^2[H_0 t](d\chi^2 + \sinh^2[\chi](d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) ,$$

³Diese Form des Linienelements heißt Robertson-Walker-Linienelement oder auch Friedmann-Robertson-Walker-Linienelement, die Modelle Friedmann-Kosmen.

ein Raum negativer Krümmung, der sich aufbläht und wieder in sich zusammenstürzt.

Wir beenden den Anhang mit der Ableitung der Metrik aus dem Doppelverhältnis. Das Linienelement der metrisch-projektiven Ebene erhalten wir als differentielle Form der Formel (E.4). Liegen A und B dicht beieinander, so ist das Doppelverhältnis nahe Eins, der Logarithmus nahe Null. Zunächst aber bestimmen wir die Schnittpunkte K_m in der Form $K_m = P + \lambda_m Q$. Die Koeffizienten λ_m genügen der Gleichung

$$0 = \langle K_m, \mathcal{A}K_m \rangle = \langle P, \mathcal{A}P \rangle + 2\lambda_m \langle P, \mathcal{A}Q \rangle + \lambda_m^2 \langle Q, \mathcal{A}Q \rangle .$$

Wir finden also

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -2 \frac{\langle P, \mathcal{A}Q \rangle}{\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle} , \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\langle P, \mathcal{A}P \rangle}{\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle} , \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 2 \frac{\sqrt{\langle P, \mathcal{A}Q \rangle^2 - \langle P, \mathcal{A}P \rangle \langle Q, \mathcal{A}Q \rangle}}{\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle} . \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Nun lösen wir

$$\mathcal{D}[P, Q; K_1, K_2] = \frac{[S, P, K_1] [S, Q, K_2]}{[S, P, K_2] [S, Q, K_1]} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} .$$

Ist nun Q dicht bei P , $Q = P + dP$, so ist λ_1 nur wenig von λ_2 verschieden, $\lambda_2 = \lambda_1 + \mathcal{O}[dP]$, und wir können

$$d[P, Q] = \frac{1}{2} \ln |\mathcal{D}[P, Q; K_1, K_2]| = \frac{1}{2} |\lambda_1 - \lambda_2| + \mathcal{O}_2[dP] .$$

schreiben. Wegen der Vietaschen Wurzelsätze (E.9) ergibt das

$$d[P, Q] = \sqrt{\left| 1 - \frac{\langle P, \mathcal{A}Q \rangle^2}{\langle P, \mathcal{A}P \rangle \langle Q, \mathcal{A}Q \rangle} \right|} + \mathcal{O}_2[dP] = \sqrt{|1 - \cos^2 d[P, Q]|} + \mathcal{O}_2[dP] .$$

Diesen letzten Ausdruck erhält man direkt bei der Betrachtung der Kugel und deren Verallgemeinerung: Die Distanz zwischen zwei Punkten auf der gewöhnlichen Kugel ist in Strahlkoordinaten durch

$$\cos d[Q, P] = \frac{\langle Q, \mathcal{A}P \rangle}{\sqrt{\langle Q, \mathcal{A}Q \rangle \langle P, \mathcal{A}P \rangle}} , \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.10})$$

gegeben. Auf der Pseudokugel ist \mathcal{A} entsprechend zu verändern. Darüberhinaus ist unter Umständen der Kosinus durch seinen hyperbolischen Partner zu ersetzen. Wir merken an, daß die Formel (E.10), so wie wir sie geschrieben haben, homogen ist:

Q , P und \mathcal{A} können durch Vielfache ersetzt werden, ohne daß sich das Ergebnis verändert.

$$d^2[P, Q] \approx 1 - \cos^2 d[P, Q] = 1 - \frac{\langle P, \mathcal{A}Q \rangle^2}{\langle P, \mathcal{A}P \rangle \langle Q, \mathcal{A}Q \rangle} = \frac{\langle (P \times Q), (\mathcal{A}P \times \mathcal{A}Q) \rangle}{\langle P, \mathcal{A}P \rangle \langle Q, \mathcal{A}Q \rangle} .$$

Um die differentielle Form zu finden, schreiben wir $Q = P + dP$ und beachten, daß $(\mathcal{A}P \times \mathcal{A}Q) \propto \mathcal{B}[P \times Q]$ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\langle (P \times dP), (\mathcal{A}P \times \mathcal{A}dP) \rangle}{\langle P, \mathcal{A}P \rangle^2} \\ &\propto \frac{\langle (P \times dP), \mathcal{B}(P \times dP) \rangle}{\langle P, \mathcal{A}P \rangle \langle P, \mathcal{A}P \rangle} = \frac{B^{mn} \epsilon_{mij} P^i dP^j \epsilon_{nkl} P^k dP^l}{(A_{ik} P^i P^k)^2} . \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Ist $P = [x, y, 1]$, $dP = [dx, dy, 0]$, und liegen \mathcal{B} und \mathcal{A} in einer Normalform mit Diagonalelementen 0, 1 oder -1 vor, so geht dieser Ausdruck in die bekannten Normalformen der Metrik homogener Ebenen über. So erhalten wir für die elliptische Geometrie die Formel

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + (xdy - ydx)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} ,$$

für die Lobachevski-Geometrie

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} ,$$

und für die DeSitter-Geometrie

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow ds^2 = \frac{-dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2}{(1 + x^2 - y^2)^2} ,$$

für die Anti-deSitter-Geometrie

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ds^2 = \frac{dx^2 - dy^2 + (xdy - ydx)^2}{(1 + x^2 - y^2)^2} .$$

Die anderen Geometrien ergeben die einfacheren Fälle.