

# Gekrümmte Welten von Gauß bis Einstein

## Entwurf

Dierck-E.Liebscher,  
Astrophysikalisches Institut Potsdam,  
<http://www.aip.de/~lie/>, [deliebscher@aip.de](mailto:deliebscher@aip.de)

*Ist ein Lichtstrahl gerade? Sind die Nordrichtungen in Berlin und Tokyo gleich oder verschieden? Wie schnell sind die Galaxien jenseits des Horizonts? Alle drei Fragen können nur beantwortet werden, wenn man sich die Mühe macht, über die Krümmung des Raums und der Welt nachzudenken.*

### Flächen im Raum

Krumm ist eigentlich nichts Besonderes. Krumm ist einfach nur nicht gerade, nicht eben, usw. Die tägliche Anstrengung geht dahin, gerade und ebene Dinge zu schaffen. Wer einmal versucht hat, eine ebene Fläche oder eine gerade Kante zu feilen, weiß, dass dies wirklich Mühe macht. Aber Geraden und Ebenen passen eben universell aneinander und sind deshalb eine Art ausgezeichnete Standard. Und was die analytische Beschreibung angeht, so ist diese für Geraden und Ebenen besonders einfach: die Grundrechenarten reichen aus.

Für gekrümmte Flächen im Raum hilft uns immerhin noch die Anschauung. Wenn wir Fahnenstangen auf eine Ebene stellen, sind sie alle im Raume parallel (Abb. 1, oben). Stellen wir sie auf eine Kugel, zeigen sie wie die Stacheln eines Igels in alle Richtungen (Abb. 1, Mitte). Krümmung einer Fläche im Raum ist also zunächst die Eigenschaft, dass die Richtung der Lote sich von Punkt zu Punkt ändert. Je schneller das geht, desto stärker ist die Fläche gekrümmt. Dabei kann sie sogar in verschiedene Richtungen gekrümmt sein (Abb. 1, unten). Eine Seifenhaut im Drahtring nimmt gerade eine Form an, bei der an jedem Punkt die mittlere Krümmung verschwindet (Abb. 2).

Gauß hat nun entdeckt, dass man die dritte Dimension **nicht** braucht, um etwas über die Krümmung herauszufinden. Wir werden uns das gleich ansehen. Gauß' Entdeckung ist deshalb so wichtig, weil sein Konzept auf Räume von drei und mehr Dimensionen übertragen werden kann, ohne dass wir uns für diese Räume eine Einbettung in noch höhere Dimensionen ausdenken müssen. Die Gaußsche **innere** Krümmung kann man ohne weiteres auf dreidimensionale Räume und vierdimensionale Welten anwenden, wie das Riemann auch getan und Einstein benutzt hat.

### Volumen und Oberfläche

Wir fangen aber erst einmal ganz einfach an und betrachten einen Breitenkreis auf dem Globus. Sein Mittelpunkt **auf** dem Globus ist der Nordpol, sein Radius  $\rho$  **auf** dem Globus ist der Bogen auf einem Meridian vom Nordpol bis zum Breitenkreis. Also ist sein Radius **größer** als nach dem Umfang  $U$  des Breitenkreises zu erwarten ist (Abb. 3). Auch die Fläche  $F$  der Kalotte ist größer als nach dem Umfang zu erwarten wäre ( $U^2 \leq 4\pi F$ ).

Das ist ein Punkt, der sofort auf den Raum angewendet werden kann. Umfang und Fläche der Kreise werden nun Oberfläche und Volumen der Kugeln. An Stelle der Breitenkreise um den Pol denken wir uns Kugeln um unseren Standpunkt. Wir sollten erwarten, dass das Quadrat des Volumens proportional dem Kubus der Oberfläche ist:

$$O^3 = 36\pi V^2$$

Nun müssen wir das prüfen: Kann man von hier aus eine Kugel von einer Milliarde Lichtjahren Radius ausmessen? Mann kann, wenn auf kosmische Lichtquellen zur Verfügung stehen, die (zumindest im Großen) gleichmäßig verteilt, überall identifizierbar und überall die gleiche Leuchtkraft (Leistung) haben. Dann ist die Helligkeit  $f$  umgekehrt proportional zur Oberfläche einer Kugel, deren Volumen wiederum proportional der Anzahl  $N$  dieser Objekte mit gleicher oder größerer Helligkeit ist. Im ungekrümmten Raum muss  $f^3 N^2$  unabhängig von der Helligkeitsgrenze  $f$  sein. Wächst dieses Produkt mit wachsendem Volumen (d.h. fallender Helligkeitsgrenze  $f$ ), entspricht das unserem Kugelflächenbeispiel, und wir nennen den Raum positiv gekrümmt, nimmt das Produkt dagegen ab, ist der Raum negativ gekrümmt. Im realen Universum wird der Effekt noch von der Expansion überlagert, bleibt im Ganzen aber noch unter der Grenze sicherer Bestimmung. Neue Beobachtungen der statistischen Eigenschaften der Hintergrundstrahlung legen nahe, einen im Großen ungekrümmten Raum zu akzeptieren. Das heißt aber nicht, dass die Union von Raum und Zeit (die **Welt**) ungekrümmt ist. Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt die Schwerkraft gerade als Ausdruck der Krümmung der Welt. Wir kommen noch darauf zurück.

### Geraden und Geodäten

Wir bleiben erst einmal bei Gauß, um seine Entdeckung genauer zu beschreiben. Der Vergleich von Umfang und Fläche einer Kugelkalotte offenbart, dass sich die Innenwinkel eines Dreiecks auf der Kugeloberfläche jetzt zu einem Winkel ergänzen, der größer als der gestreckte Winkel ist. Der einfachste Fall ist die halbe Apfelsinenschale (Abb. 4).

Wir müssen uns nun fragen: Sind die Seiten des Dreiecks wirklich Geraden? Jedenfalls kann man kein Lineal anlegen, das wirklich richtig aufliegt. Was ist eine Gerade auf einer gekrümmten Fläche? Wir schauen erst einmal dem Meister über die Schulter, wenn er prüft, ob die gefeilte Kante gerade ist. Er peilt an der Kante entlang, vergleicht also mit einem Lichtstrahl. Wenn er zwei Punkte der Kante anpeilt und dann alle hintereinander sieht, ist die Kante gerade. Der Lichtstrahl ist das Leitbeispiel einer Geraden. Es gibt nichts Besseres.

**Grundsatz: Zwei Geraden haben höchstens einen Punkt oder alle Punkte gemeinsam. Haben zwei Kurven mehr als einen Punkt gemeinsam, ohne alle gemeinsam zu haben, ist wenigstens eine der Kurven keine Gerade.**

Wenn sich das Licht nun aber **auf** der Fläche ausbreiten muss, der Lichtstrahl in der Fläche liegen muss, in welchem Sinne ist er dann noch gerade? Um diese Frage zu beantworten, können wir uns am Fermatschen Prinzip orientieren. Dann sehen wir, dass der Lichtstrahl eine kürzeste Linie sein sollte (solche Linien heißen **Geodäten**). Wir verstehen unter Geraden jetzt also Geodäten, und unsere Dreiecke also immer als Geodätendreiecke. Richtige Geraden sind die Geodäten nun allerdings nur in besonderen Fällen. Das sieht man am einfachsten dann, wenn sich zwei solcher Geodäten in mehr als einem Punkt schneiden. Nehmen wir an, ein Leuchtturm steht hinter einer Bergkuppe und das Licht muss sich auf dem Boden ausbreiten (als ob der Boden eine ausgerollte Glasschicht ist). Dann gibt es vom Leuchtturm zu unserem Standpunkt eine Geodäte links am Berg vorbei und eine rechts vorbei. Wir sehen das Licht aus zwei verschiedenen Richtungen (und gegebenenfalls auch zu verschiedenen Zeiten) ankommen. Die Lichtstrahlen, deren Weg am Schnittpunkt Leuchtturm beginnt, schneiden sich ein zweites Mal am Standpunkt des Beobachters. Die Glasschicht ist eben gekrümmt.

Wir beobachten das tatsächlich bei der Lichtablenkung im Schwerfeld, die bei genügend großen Entfernungen und Massen solche Mehrfachbilder produziert (Abb. 5). Sind die Entfernungen nicht so groß, treten Mehrfachbilder nicht auf, und die Frage der Krümmung muss anders beantwortet werden.

### Richtungsvergleich

Kehren wir also zurück zu unseren Fahnenstangen. Auf einer gekrümmten Fläche stehend, haben sie verschiedene Richtungen – aber eben im **Raum**. Gemessen am Raum, sind sie alle senkrecht auf der Fläche. Ist das nicht Gleichheit? Leider gehören die Fahnen nicht zur Fläche. Wie ist es nun mit den Richtungen **in** der Fläche? Ist die Nordrichtung in Bordeaux die gleiche wie in Stavropol, Berlin oder Tokyo?

Wenn wir unsere für die Fläche gewonnenen Ergebnisse auf Räume und Welten anwenden oder verallgemeinern wollen, dann dürfen wir uns bei der Untersuchung der Flächen gerade **nicht** auf den dreidimensionalen Raum und die Lage im Raum berufen. Was also tun, wenn Richtungen auf die Entfernung verglichen werden sollen? Wir müssen wenigstens eine Richtung – vorsichtig, damit sie sich nicht ändert – über die Fläche zu dem Punkt transportieren, wo die andere Richtung festgelegt ist, und dann vergleichen. Diese Prozedur heißt Paralleltransport. Entlang einer Geodäten halten wir eine Richtung fest, indem wir ihren Winkel zum geodätischen Weg festhalten. Sehen wir uns das am Kugeldreieck von Abb. 4 an. Die Meridiane sind Geodäten und wir können die Nordrichtung des Meridians den Meridian entlang verschieben. Die Nordrichtungen können sowohl am Nordpol als auch am Äquator verglichen werden. Vergleichen wir die Nordrichtungen am Äquator, sind sie gleich, tun wir das am Nordpol, sind sie verschieden. Offensichtlich hängt das auch mit der Winkelsumme im Dreieck zusammen. Der Winkel einer Richtung mit sich selbst nach einem Umlauf ist gerade so groß, wie die Winkelsumme im Dreieck den gestreckten Winkel übersteigt. Der Vergleich von Richtungen hängt auf gekrümmten Flächen, in gekrümmten Räumen und Welten von dem Weg ab, der den Vergleich vermittelt.

### Richtungstransport

Eine wichtige Frage ist noch offen: Woher weiß man, dass man auf einer Geodäte fährt, wenn sie vorher nicht gezogen ist? Die Magnetnadel ist nur bei kurzen Strecken ein brauchbarer Ratgeber. Ein Weg auf der Kugel, der einen festen Winkel zur Kompassnadel einhält, ist nämlich keine Geodäte, sondern eine Spirale (sie heißt **Loxodrome**, Abb. 6). Uns hilft eine sinnreiche chinesische Erfindung, der Zhi-nan Che (Südzeiger-Wagen, Abb. 7). Ein Differenzgetriebe vergleicht die Laufleistung der beiden Räder. Sind beide Laufleistungen gleich, bewegt sich der Wagen auf einer Geodäten. Das Getriebe sorgt in diesem Fall dafür, dass die Richtung des Zeigers sich im Vergleich zum **Wagen** nicht ändert. Drehen wir den Wagen auf der Stelle, sorgt das Getriebe dafür, dass sich die Richtung des Zeigers zur Fläche nicht ändert. Fahren wir den Wagen auf einem ebenen Tisch herum, sehen wir, wie er eine einmal angezeigte Richtung herumtransportiert, ohne sie zu verändern. Diesen Wagen nehmen wir, um eine Richtung auch auf einer gekrümmten

Fläche zu transportieren [2]. Bei Fahrt um eine geschlossene Kurve stellt sich dann heraus, ob die Fläche gekrümmt ist: Die transportierte Richtung ist dann nicht mehr die Ausgangsrichtung, sie ist verdreht (Abb. 8). Dabei hängt die Drehung nicht von der gewählten Ausgangsrichtung ab. Sie betrifft die Tangentialebene als Ganzes. Die Drehung, bezogen auf die umfahrene Fläche, ist das universelle Maß der Krümmung. Abbildung 9 zeigt den Paralleltransport um ein Geodätenviereck auf der Kugel, wie wir ihn im Folgenden variieren werden. Das Viereck hat drei rechte Winkel, der vierte aber ist größer. Seine Differenz zum rechten Winkel ist gerade die Drehung, die die Nordrichtung in  $A$  erfährt, wenn man sie parallel um das Viereck  $ABCD$  herumführt. Damit ist die Krümmung auch in höherdimensionalen Räumen und Welten definiert, auch wenn sie dort je nach Orientierung der umfahrenen Flächenstücke verschiedene Komponenten hat.

**Grundsatz: Die Krümmung erweist sich beim Paralleltransport von Richtungen um geschlossene Kurven als Drehung.**

Wenn wir uns nun von der verführerischen Anschauung der Kugelfläche im Raum lösen wollen, zeichnen wir eine Karte der Kugelfläche auf einem ebenen Blatt Papier. Von der Erdoberfläche gibt es die verschiedensten Darstellungen. Eine ist für unsere Zwecke besonders geeignet. Es ist die Mercator-Projektion. Sie zeichnet sich durch Winkeltreue aus, die mit Verzerrungen bezahlt werden muss. Schauen wir uns das zunächst für die Mercator-Projektion der Erdkugel an (Abb. 10). Meridiane und Breitenkreise werden als gerade Linien dargestellt. Mercators Idee war, auch den Maßstab der Meridiane selbst so zu ändern, dass die Winkel an jedem Punkt der Karte mit den Winkeln auf dem Globus übereinstimmen. Die Geodäten (Großkreise) allerdings sind in dieser Karte **keine** Geraden (Abb. 11).

## Die Welt

Nun kommen wir zum Gegenstand der Allgemeinen Relativitätstheorie, der Krümmung der Union von Raum und Zeit (der **Welt**). Diese Krümmung, nicht etwa die des Raums, modelliert das Schwerfeld. Hier wollen wir uns nur ansehen, wie sich diese Krümmung darstellt. Dazu müssen wir zuerst die Raum-Zeit-Union selbst darstellen, und wir tun dies in Form einer Karte, so wie wir die Erdkugel auch als ebene Karte darstellen können. Sicher hat nun auf der Karte nur noch eine Raumdimension Platz, da die zweite Richtung die Zeit darstellen muss. Eine solche Karte ist eine Art Registrierstreifen (Abb. 12), ein Orts-Zeit-Diagramm.

Die geometrischen Zusammenhänge auf dem Registrierstreifen sind ein besonderes Kapitel (die spezielle Relativitätstheorie [1, 3]). Wir müssen hier nur zwei Dinge in Erinnerung rufen. Zunächst sehen Lote anders als in der gewohnten Zeichenebene aus, weil Orts- und Zeitrichtung nicht austauschbar sind und deshalb Drehungen nicht mehr wie gewohnt konzipiert werden können. Drehungen gibt es aber noch, schließlich ist die Neigung oder Richtung einer Spur auf dem Registrierstreifen die Geschwindigkeit, mit der sich der Gegenstand bewegt, der die Spur zeichnet. Drehungen wiederum können aus Spiegelungen konstruiert werden, die sich nach Einsteins Axiom richten:

**Lichtgeschwindigkeit bleibt Lichtgeschwindigkeit, unabhängig von der Geschwindigkeit des Spiegels.**

Die Spuren, die Lichtsignale ziehen, haben immer die gleiche Neigung gegen die Vertikale. Man kann diese Neigung wählen, und man wählt sie so, dass man sie immer gleich erkennt, nämlich in der Schräge, die Vertikale und Horizontale nach gewohnter Vorstellung halbiert. Die Spiegelungen (Abb. 13) definieren nun lotrechte Richtungen. Auf schiefen Geraden scheinen sie zu diesen hingeneigt (Abb. 14), was wir bei der Beurteilung der Zeichnungen im Folgenden beachten müssen.

Die Spiegelungen definieren nun auch Gleichheit von Intervallen und schließlich auch Drehungen (sie heißen **Lorentz-Drehungen**), wenn man zwei von ihnen zusammensetzt. Die Neigung der Spuren gegen die Vertikalen (das sind die Spuren der Objekte, die sich gegen den Registrierstreifen nicht bewegen) bleibt immer kleiner als die Neigung der Lichtspuren. Die Lichtgeschwindigkeit kann nicht durch wiederholte Beschleunigung überschritten werden. Spiegelungen und Drehungen ändern daran nichts. Das ist im Folgenden auch der Grund, weshalb die Geschwindigkeiten der Galaxien beim Paralleltransport zum Ort ihres Vergleichs immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit bleiben müssen. Lotrechte Richtungen bleiben auch bei Lorentz-Drehungen lotrecht. Das ist der Grund, weshalb bei Benutzung von Koordinatenachsen Lorentz-Drehungen diese wie eine Schere auf- und zugehen lassen. Ein weiterer Punkt: Aus dem Einsteinschen Axiom kann man ableiten, dass in der Orts-Zeit-Ebene Umwege unerwarteterweise **kürzer** als die direkten Verbindungen sind. Geodäten sind nicht kürzeste, sondern längste Verbindungen. Dies brauchen wir allerdings nur, um die Form der Geodäten im expandierenden Universum einzusehen.

## Das Universum

Wir wollen die Krümmung der Welt exemplarisch am expandierenden Universum darstellen. Wir wissen, dass die Galaxien sich im Mittel von uns entfernen, und zwar um so schneller, je weiter sie schon entfernt sind. Wir

messen das an einer Verschiebung der Spektrallinien ins Langwellige, die mit einem Doppler-Effekt verglichen werden muss. In einer bestimmten Entfernung wächst die Rotverschiebung über alle Schranken und indiziert Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit. Was geschieht jenseits dieser Entfernung? Gibt es da Überlichtgeschwindigkeit?

Wir beginnen mit einem elementaren Analogon zur Kugel. An die Stelle der Kugeloberfläche tritt nun als Registrierfläche die Fläche eines Hyperboloids in einer hier dreidimensionalen Welt (zwei Raum- und eine Zeitdimensionen, Abb. 15). Bei Spiegelungen, wie wir sie in Abbildung 13 kennengelernt haben, verändert das Hyperboloid seine Form nicht. Es ist ebenso symmetrisch wie die Kugel im Raum, nur eben gegen Spiegelungen in der Raum-Zeit-Union. Es ist also eine Pseudo-Kugel in der dreidimensionalen Welt. Wie bei der Kugel schneiden alle Ebenen durch den Mittelpunkt Geodäten aus der Fläche. Äquator und Meridiane sind Geodäten. Die Meridiane repräsentieren die Registrierkurven der Galaxien im Universum, das hier im vollständig symmetrischen Beispiel erst kontrahiert und dann expandiert (dies ist eins der deSitter-Modelle). Die Fläche des Hyperboloids ist ein ersichtlich gekrümmtes Orts-Zeit-Diagramm.

Auch die Pseudokugel hat eine Mercator-Projektion auf die Orts-Zeit-Ebene (Abb. 16). Wenn die Registrierkurven der Galaxien vertikale Geraden sind, heißen die entsprechenden Ortskoordinaten **mitbewegte** Koordinaten. Der wirkliche Abstand zwischen zwei solchen Meridianen hängt von der Zeit ab (so wie auf der Erde von der geographischen Breite).

Um die Krümmung ablesbar zu machen, zeichnen wir analog zu Abb. 11 eine Schar (raumartiger) Geodäten. Die Form der Geodäten hängt nur vom Zeitpunkt ihres Scheitels ab. Sie können horizontal ebenso verschoben werden wie die Geodäten in der Mercator-Projektion der Erde. Die Rotationssymmetrie der Kugel bildet sich in ihren geographischen Koordinaten in gleicher Weise ab wie die Homogenität des Universums in dessen Mercator-Koordinaten. In Abb. 16 ist auch wieder das geodätische Viereck zu sehen, und dass das spezielle geodätische Viereck drei, aber nicht vier rechte Winkel aufweist. Der Paralleltransport um solche Vierecke liefert gerade wieder den Exzess.

Die Tangenten an die Meridiane sind nun die Geschwindigkeiten der Galaxien, deren Registrierkurven gerade die Meridiane sind. Man sieht: Der Paralleltransport um eine geschlossene Kurve liefert wieder eine Drehung. Diese Drehung indiziert die Krümmung der Raum-Zeit. Können wir zwei Geschwindigkeitsvektoren an einem Punkt vergleichen, ist die Differenz gerade die Relativgeschwindigkeit.

Das reale Universum hat eine etwas andere Maßstabsverteilung, aber qualitativ bleibt alles wie vorgestellt. Zunächst nehmen die Abstände ständig zu. Die Existenz des unteren Randes ist nun dem Anfang der Zeit geschuldet. (Abb. 17). Anders als im deSitter-Modell enden auch die raumartigen Geodäten auf dem unteren Rand, und so gibt es keinen Äquator. Dennoch fällt an dem eingezeichneten Geodäentrapez die Abweichung der Winkel von den euklidischen Verhältnissen ins Auge. Natürlich hängt das Ergebnis eines Paralleltransports vom Wege ab. Damit können wir uns auf verschiedene Transportvorschriften zur Festlegung einer reproduzierbaren Relativgeschwindigkeit einigen (Abb. 19). Besonders nahe liegt es, für den Transport des Geschwindigkeitsvektors einer eben beobachteten Galaxie eben den Weg in der Karte zu wählen, den das Licht selbst zurücklegt. Dieser Transport liefert nun eine Relativgeschwindigkeit, die man gerade aus der Rotverschiebung nach der gewohnten speziell-relativistischen Formel berechnet.

Transportieren wir den Geschwindigkeitsvektor einer Galaxie quer durch das Universum zu einer anderen, ergibt sich eine Relativgeschwindigkeit, zu der ohne Rechnung festgestellt werden kann, dass sie **immer** kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, Horizont hin oder her. Das Ergebnis der Transporte längs der Geodäten zu einem bestimmten Aufpunkt (hier und heute) ist in Abbildung 20 zu sehen. Die messbaren Relativgeschwindigkeiten sind ohnehin nur die zu den Galaxien, von denen wir bereits Licht erhalten, und von diesen wieder nur zu Zeiten, von denen wir eben erst das Licht erhalten. Diese Zeiten werden angedeutet durch den Schnitt der Registrierkurven der heute ankommenden Lichtsignale mit denen der entfernten Galaxien. Die Schmitte wieder enden zum Anfang der Zeit, wo sie den Horizont definieren. Die Relativgeschwindigkeit erreicht Lichtgeschwindigkeit am Horizont, das ist aber eben kein Ort, sondern ein Zeitpunkt. Vor diesem Zeitpunkt gibt es nichts zu beobachten, und nach diesem Zeitpunkt ist der Transport ganz normal und liefert nur Unterlichtgeschwindigkeit.

## Literatur

- [1] LIEBSCHER, D.-E. (1999): *Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene*, Teubner, Leipzig.
- [2] LIEBSCHER, D.-E. (1999): Mit dem Kompasswagen über den Globus, *Der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Unterricht* **52**, 140-144.
- [3] LIEBSCHER, D.-E. (2005): Der kürzeste Weg zu  $E = mc^2$ , *Praxis der Naturwissenschaften Physik in der Schule* **54**, 11-17.
- [4] VAKULIK, V.G., DUDINOV, V.N., ZHELEZNYAK, A.P., TSVETKOVA, V.S. (1997): VRI photometry of the Einstein Cross Q2237+0305 at Maidanak observatory, *Astronomische Nachrichten* **318**, 73-79.

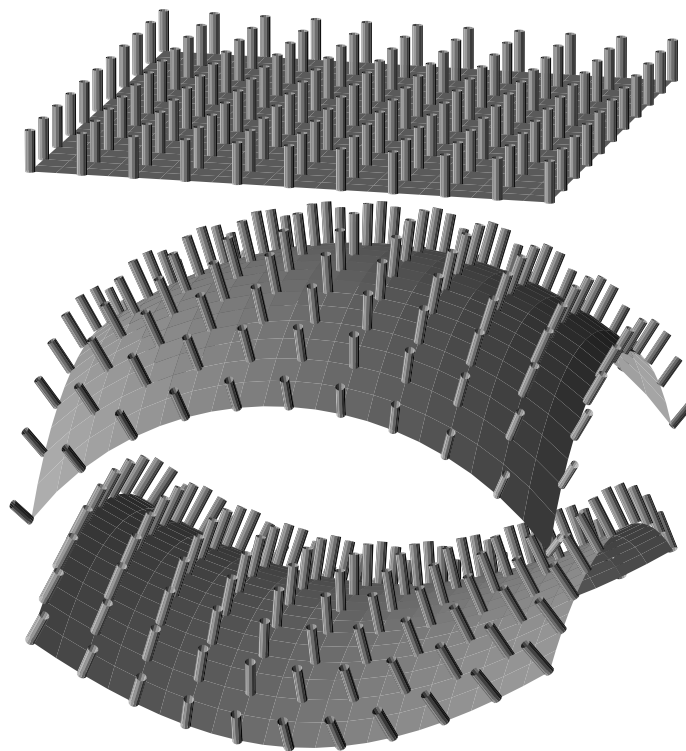


Abbildung 1: Flächen verschiedener Krümmung

Wir verdeutlichen die Krümmung der Flächen an der Variation der Lote. Sind alle Lote parallel, ist die Fläche eben. Gehen die Lote in allen Richtungen auseinander, ist die Fläche gekrümmt. Es gibt Flächen bei denen die Lote in einer Richtung auseinander, in der anderen zueinander weisen.

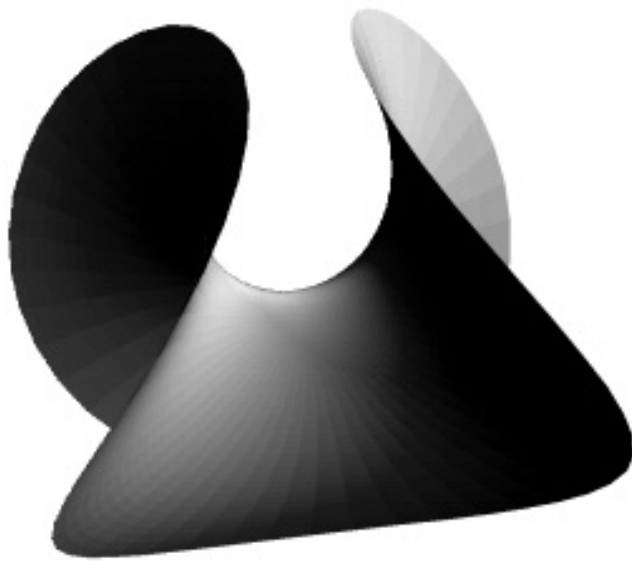


Abbildung 2: Seifenhaut

Seifenhäute sind Flächen, bei denen die Fläche in einem festen Draht ring so klein wie möglich ist (Minimalfläche). Es zeigt sich, dass dann gerade die mittlere Krümmung überall verschwinden muss.

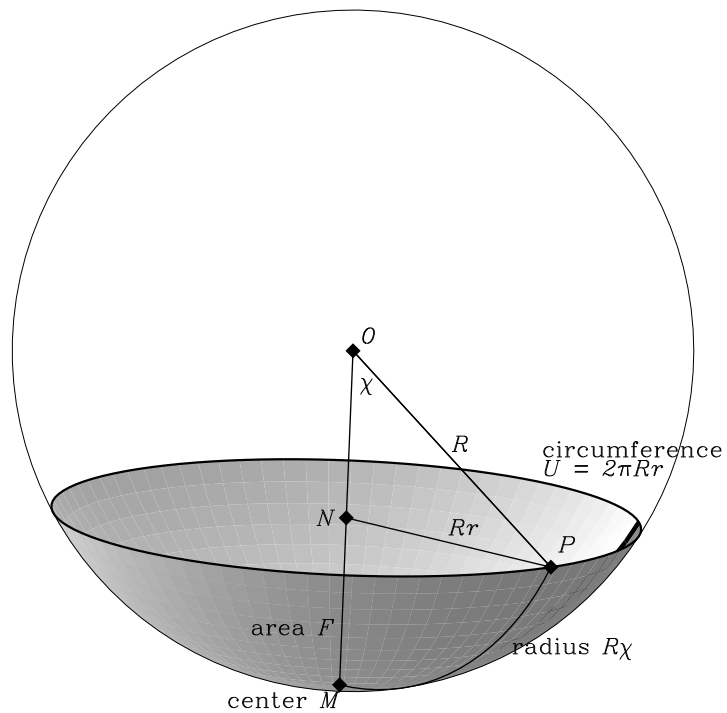


Abbildung 3: Fläche und Umfang auf der Kugel

Ein Kreis auf der Kugel­fläche ist der Rand einer Kalotte. Sein Radius um den Mittelpunkt  $M$  ist ein Bogen  $\varrho = R\chi$  auf der Kugel­fläche. Die Projektion  $Rr$  dieses Radius auf die Schnitt­ebene ist kürzer ( $NP < MP$ ), folglich ist der Umfang  $U = 2\pi Rr$  kleiner als der euklidisch erwartete Wert  $2\pi R\chi$ . Die Fläche der Kugel­kalotte ist proportional der Höhe,  $F = 2\pi Rh = 2\pi R^2(1 - \cos \chi)$  und daher ebenfalls kleiner als der euklidisch erwartete Wert  $\pi R^2\chi^2$ . Verglichen mit dem Umfang, ist die Fläche größer als der euklidisch erwartete Wert.

$$U^2 < 4\pi F < 4\pi^2\varrho^2 \text{ für } \varrho > 0.$$

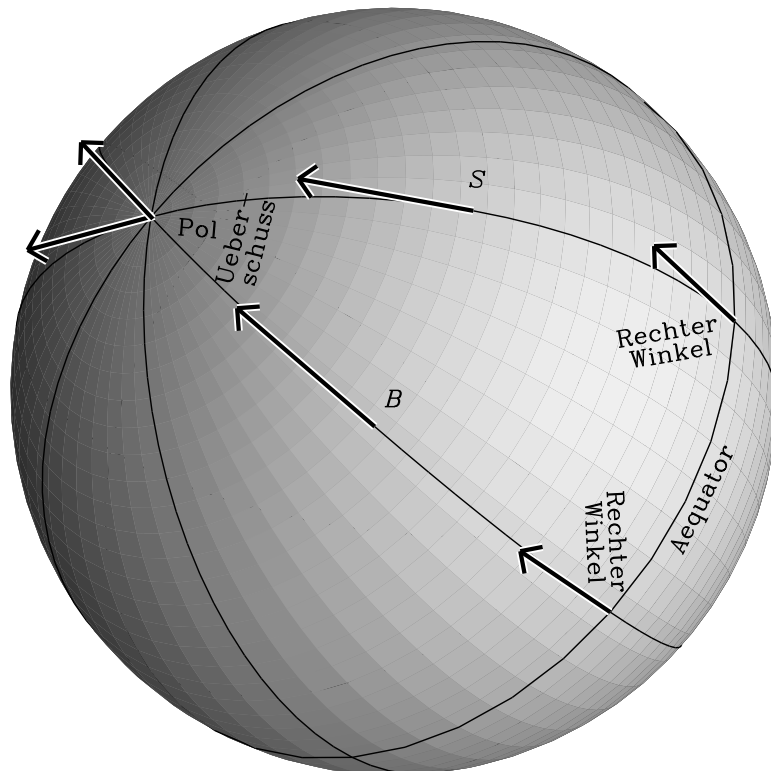


Abbildung 4: Winkelsumme und Richtungsvergleich

Wenn wir ein Dreieck aus zwei Meridianen und dem Äquator betrachten, stehen die Meridiane auf dem Äquator senkrecht und die Winkelsumme übersteigt den gestreckten Winkel um den Winkel, den die Meridiane am Pol bilden.

An zwei Punkten  $B$  und  $S$  sind die Nordrichtungen eingezeichnet. Verschieben wir sie an den Pol, erscheinen sie verschieden. Verschieben wir sie zum Äquator und auch um den Äquator, erscheinen sie gleich.



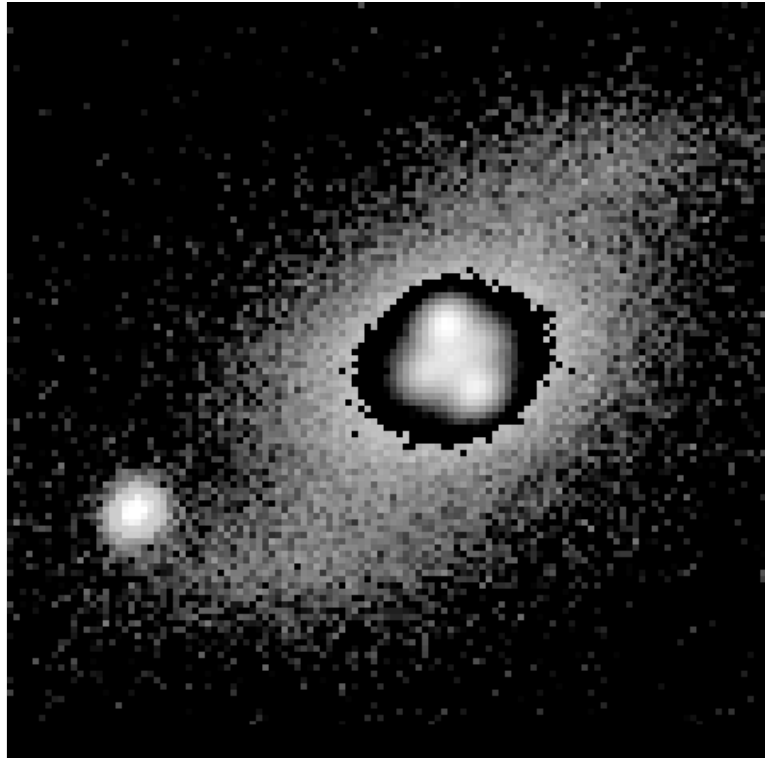


Abbildung 5: Das Einstein-Kreuz

Die zentrale Massenkonzentration der Vordergrundgalaxie erzeugt ein vierfaches Bild des Hintergrundquasars Q2237+0305 (Sternbild Wassermann), das Einstein-Kreuz genannt wird. Der Quasar steht fast genau hinter dem Zentrum der Vordergrundgalaxie. Dessen Helligkeit ist in der Abbildung abgezogen, damit alles zu sehen ist. Links unten steht ein Vordergrundstern.

Dieses Bild des Einstein-Kreuzes ist von der Erde aus gewonnen. P. Notni hat es mit dem 1.5m-Teleskop von Maidanak am 17.9.95 aufgenommen [4]. Wegen der Eigenbewegung der Galaxie und ihrer Komponenten hat sich das Bild seit der Entdeckung des Kreuzes 1988 bereits deutlich verändert.



Abbildung 6: Eine Loxodrome (Kurve mit fester Richtung zur Magnetnadel)

Die Loxodromen sind Kurven fester Neigung gegen eine vorgegebene Linienkongruenz, in unserer Abbildung gegen die Meridiane einer Kugel. Sie kann durch die Magnetnadel gesteuert werden. Hier hat die Loxodrome eine feste Abweichung vom Meridian von ungefähr  $\delta = 0.35\pi$  und nähert sich dem Pol wie eine logarithmische Spirale, ohne ihn je zu erreichen (die logarithmischen Spiralen sind die Loxodromen der Ebene). In Kugelkoordinaten (geographische Länge  $\lambda$ , geographische Breite  $\phi$ ) ist die Gleichung der Loxodromen  $\cos \phi \, d\lambda = \tan \delta \, d\phi$ . Für  $\delta = 0.5\pi$  ergeben sich die Breitenkreise.

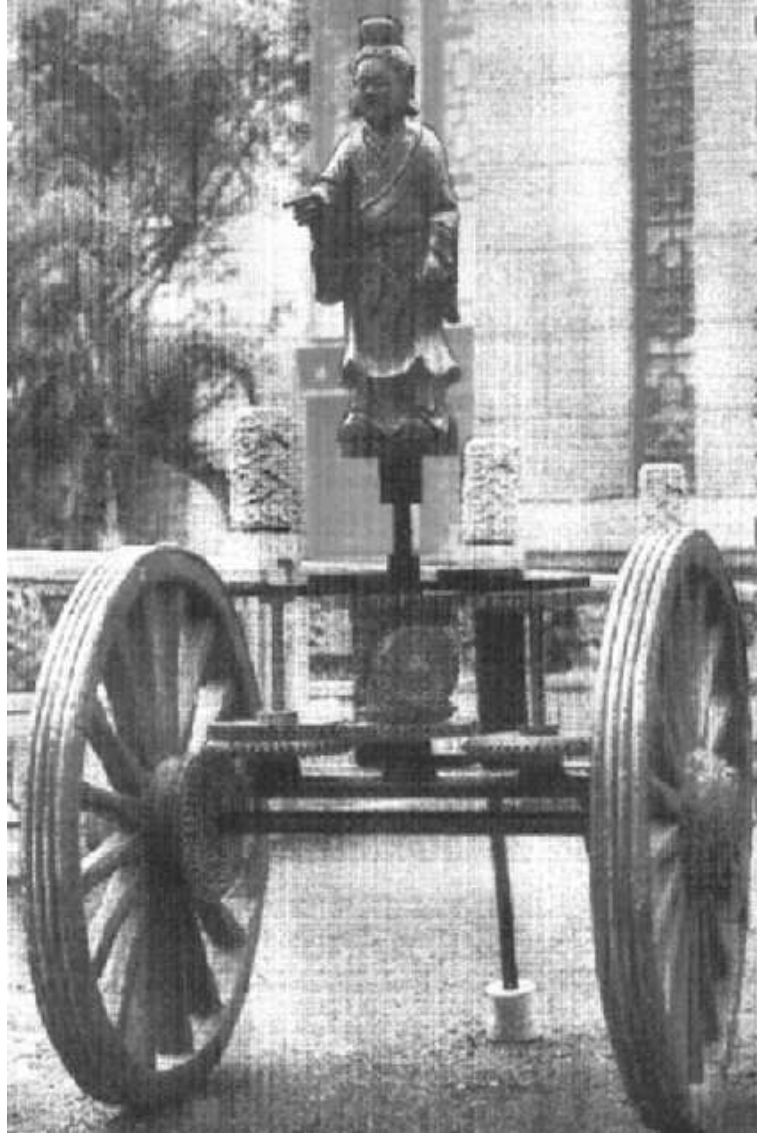


Abbildung 7: Ein Zhi-nan Che (Südzeiger-Wagen)

Die Legende berichtet von einem Kaiser Huang Di, der mit seiner Armee den Weg durch den Nebel fand, um – natürlich – Rebellen zu schlagen. Er benutzte einen Wagen, der ihm beständig die gleiche Richtung wies. Um die Möglichkeit dieser Geschichte zu beweisen, fand sich zur Zeit der Song-Dynastie ein Mechaniker, der ein Modell baute. Von diesem Modell ist nur eine Beschreibung geblieben und die Zeichnung einer Jadedfigur. Das hier gezeigte Modell steht vor dem Nationalmuseum in Taipeh. Yinan Chin hat mir dieses Bild zukommen lassen.

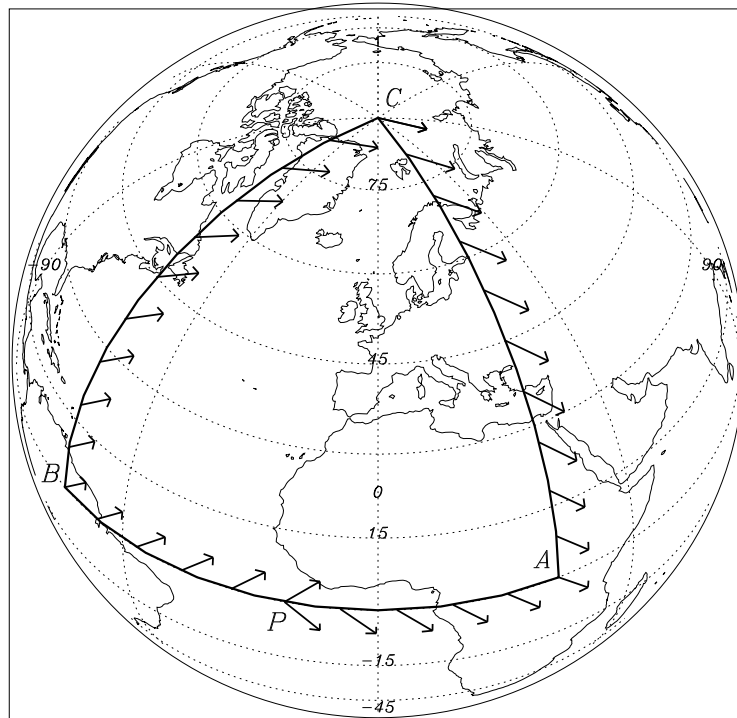


Abbildung 8: Transport einer Richtung um eine geschlossene Kurve

Am Punkt  $P$  wählen wir eine beliebige Richtung (hier nach SO). Längs der Geodäten bis Punkt  $A$ , von  $A$  nach  $C$ , von  $C$  nach  $B$  und von  $B$  zurück zu  $P$  halten wir die Richtung relativ zur Bewegungsrichtung fest. Nur in den Punkten  $A$ ,  $C$  und  $B$  berücksichtigen wir, daß der Weg einen Knick um  $\pi/2$  nach links macht und wir zur Abweichung nach rechts jeweils diesen Winkel zulegen müssen, wenn wir die Eckpunkte passieren. Sind wir bei  $P$  wieder angelangt, haben wir zur Abweichung nach rechts  $3\pi/2$  addiert, insgesamt beobachten wir also eine Drehung der Tangentialebene um  $\pi/2$  nach links. Die Winkelsumme des umfahrenen Dreiecks überschreitet den euklidischen Wert ( $\pi$ ) gerade um diese  $\pi/2$ .

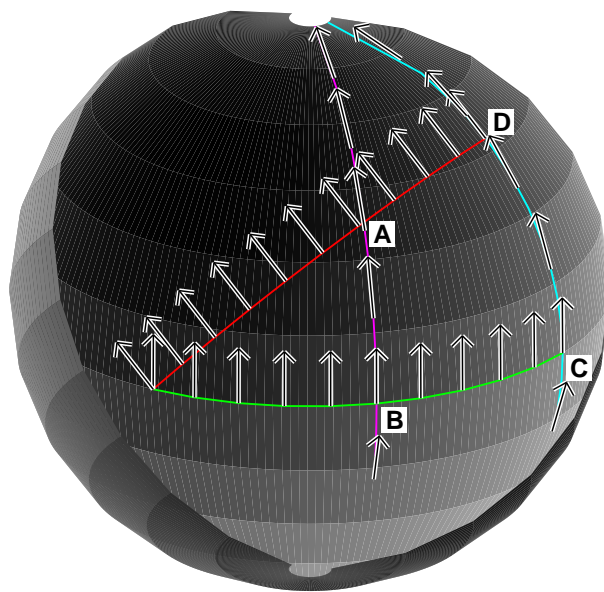


Abbildung 9: Paralleltransport um ein geodätisches Viereck auf der Kugel

Das Viereck besteht aus dem Äquator, zwei Meridianen und einer vierten Geodäte, die auch ein Großkreisbogen ist. Die Winkel bei  $B$ ,  $C$  und  $D$  sind rechte Winkel. Die Nordrichtung bei  $A$  ist nach Transport über  $B$  und  $C$  nach  $D$  immer noch Nordrichtung, aber nicht mehr nach dem Transport von  $D$  zurück nach  $A$ .

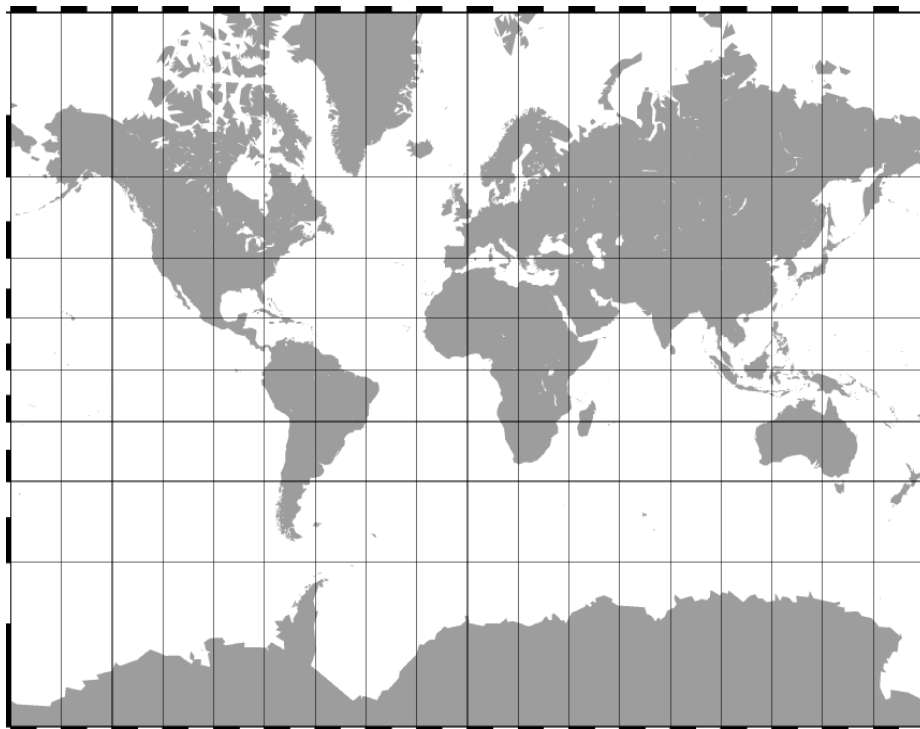


Abbildung 10: Mercator-Projektion der Erdkugel

Der Maßstab der Breitengrade hängt vom Breitengrad selbst ab. Der wirkliche Abstand zwischen zwei Meridianen nimmt – anders als auf der Karte – zu den Polen hin ab. Ist der Maßstab auf den Meridianen so gewählt, dass die Winkel an jedem Punkt der Karte mit den Winkeln auf dem Globus übereinstimmen, kann ein Kapitän mit dem Lineal die Kompassrichtung bestimmen, die ihn bei festem Kurs (d.h. auf einer Loxodromen) von Hafen zu Hafen führt.

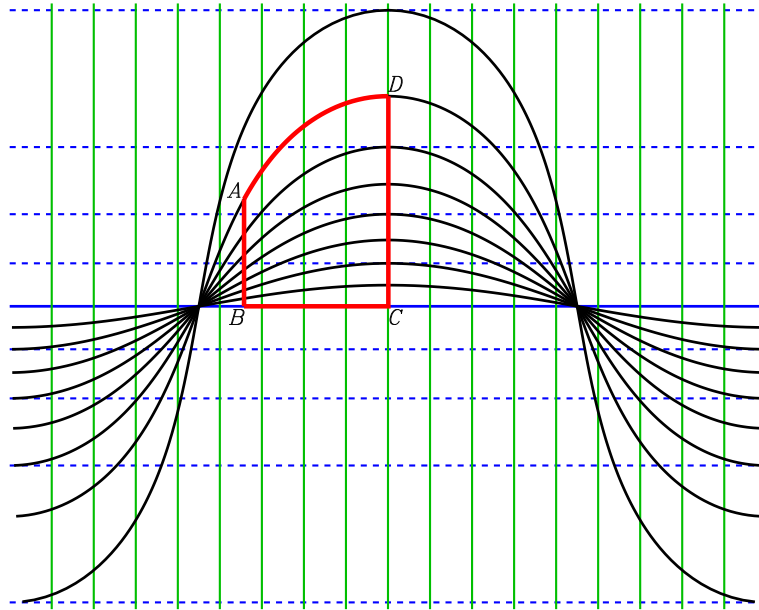


Abbildung 11: Mercator-Projektion der Geodäten

Von den geraden Linien in der Mercator-Projektion sind nur die Meridiane und der Äquator Geodäten. Die Breitenkreise sind es nicht. Kurven, die in höhere Breiten ausweichen, können kürzer werden. Wir zeichnen eine Geodätenschar, deren maximale Breite auf einem gewählten Meridian liegt. Alle anderen Geodäten erhält man wegen der Rotationssymmetrie durch horizontale Verschiebung der gezeichneten Geodäten. In der Abbildung ist ein Viereck eingezeichnet, an dem wir wieder unmittelbar sehen können, dass es drei rechte Winkel hat, der vierte (bei A) jedoch größer als ein rechter Winkel ist.

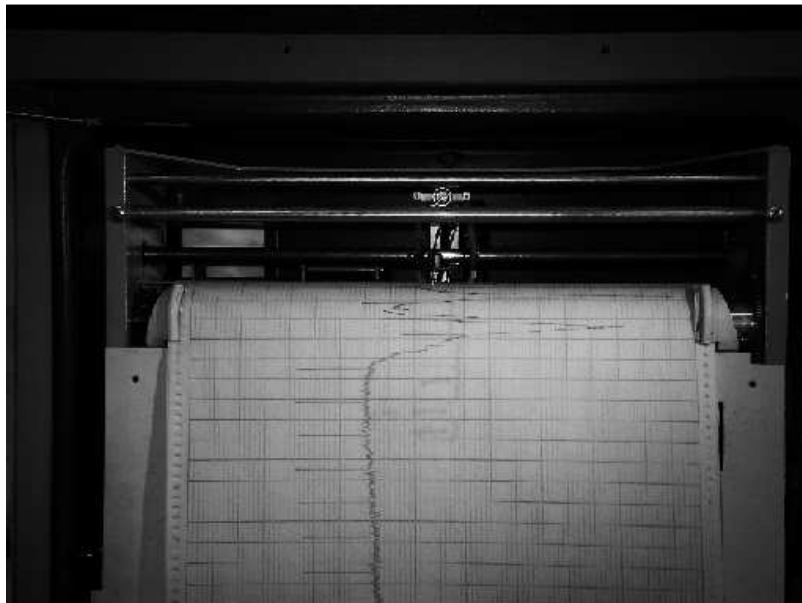


Abbildung 12: Registrierstreifen eines Radiometers

Die Bewegung der Nadeln ist als Spur dargestellt. Dieses Prinzip sehen wir im Orts-Zeit-Diagramm, wo eine Richtung die Zeit und die andere die Position darstellt. Nun denken wir uns statt der Nadeln Objekte die sich durch den Raum bewegen, speziell die Galaxien und ihre Expansionsbewegung.

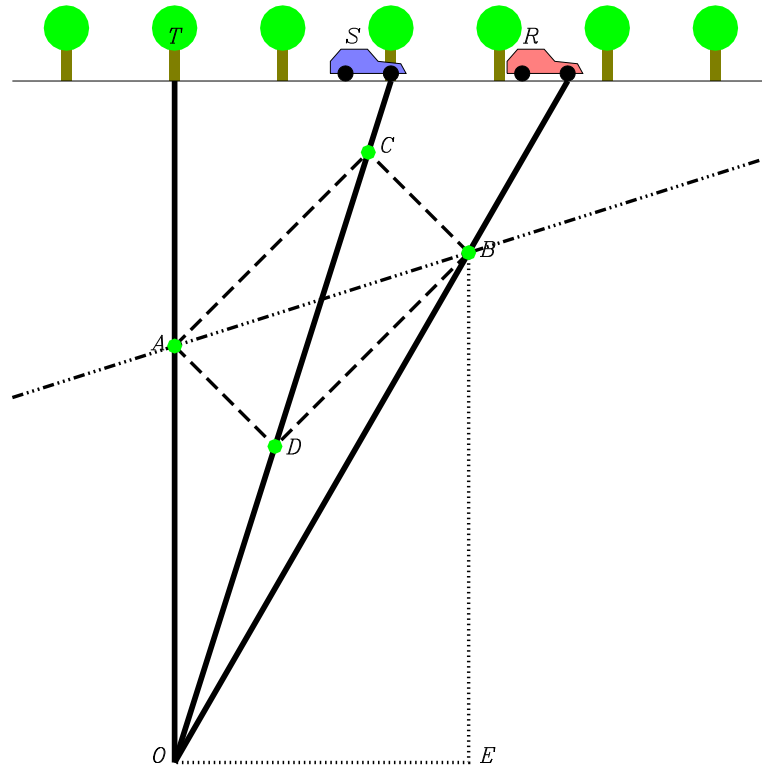


Abbildung 13: Die Konstruktion der Spiegelung auf dem Registrierstreifen

Wir konstruieren auf einem Registrierstreifen, der hier nach unten gezogen wird, die Spuren eines Baumes  $T$  und zweier Wagen  $R$  und  $S$ , die beide zu gleicher Zeit  $O$  am Baum  $T$  vorbeigefahren sind. Die Geschwindigkeit der Wagen zum Baum sind  $TS/OT$  bzw.  $TR/OT$ . Die Spuren werden als spiegelsymmetrische Situation dargestellt, wobei die Spiegelung nach der relativistischen Vorschrift 'Lichtgeschwindigkeit bleibt Lichtgeschwindigkeit' konstruiert wird und  $OS$  die Gerade ist, an der  $OT$  gespiegelt wird. Das Spiegelbild der Richtung  $DA$  ist also  $DB$  die Spiegelung der Richtung  $AC$  ist  $BC$ . Daher ist  $OB$  das Spiegelbild von  $OA$ . Die Strecke  $AB$  ist zu sich selbst symmetrisch. Sie kennzeichnet die Lotrichtung auf  $OC$ . Die Standardkonstruktion eines Lotes nutzt ein Parallelogramm aus Lichtspuren (ein **Lichteck**). Die Diagonalen eines solchen Lichtecks sind lotrecht aufeinander.



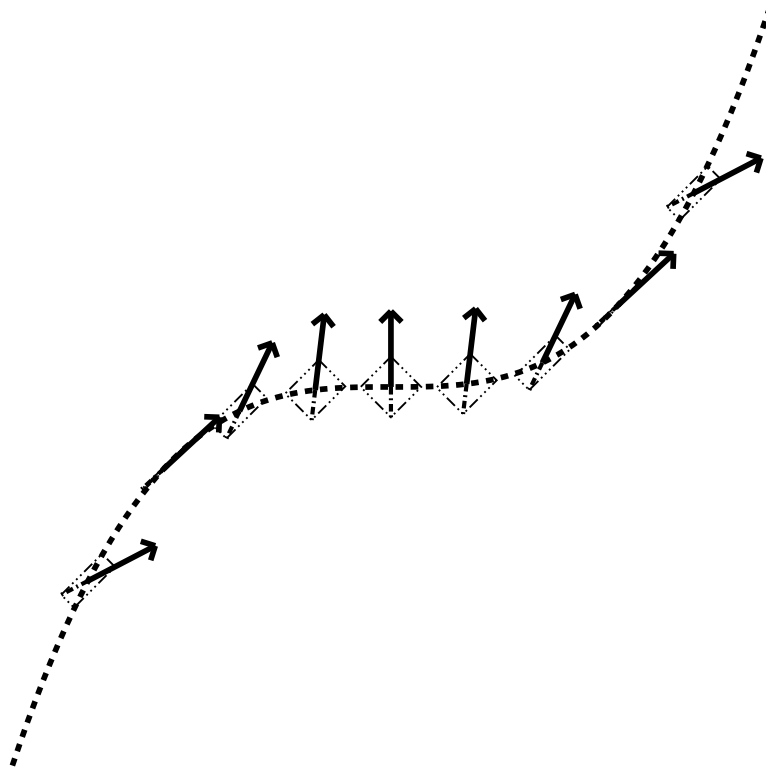


Abbildung 14: Die Lage der Lote einer Kurve auf dem Registrierstreifen

Neigungen kleiner als die der Lichtspuren bezeichnet man als zeitartig, Neigungen größer als die der Lichtspuren als raumartig. Bei einem Paar lotrechter Richtungen ist immer eine raumartig und eine zeitartig. (Die Neigung der Lichtspuren ist etwas Besonderes: Lichtspuren sind auf sich selbst senkrecht.)

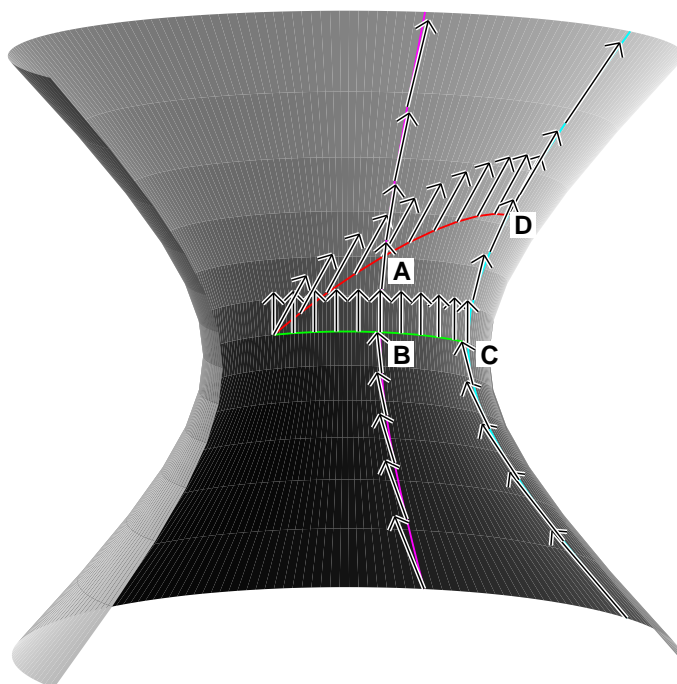


Abbildung 15: Paralleltransport um ein geodätisches Viereck auf der Pseudo-Kugel

Die vertikale Achse ist die Zeitachse. Die Drehung um diese Zeitachse enthält nichts Ungewohntes. Die horizontalen Achsen sind räumliche Richtungen. Eine Drehung um diese Richtungen sind die Lorentz-Drehungen mit der Faltbewegung der Koordinatenebenen, wie wir sie aus der Speziellen Relativitätstheorie kennen. Ein Lot auf einer schiefen Ebene sieht aus, als wäre es zur Ebene hin geneigt. Das Viereck  $ABCD$  hat wieder nur drei rechte Winkel bei  $B$ ,  $C$  und  $D$ , während die Seite  $AD$  eben nicht auf  $AB$  senkrecht steht. Die Parallelverschiebung um  $ABCD$  verdreht die Richtung entgegen zum Drehsinn des Weges. Die Tangente an den Meridian bei  $D$  ist nach Verschiebung nach  $A$  nicht parallel zur Tangente in  $A$ .

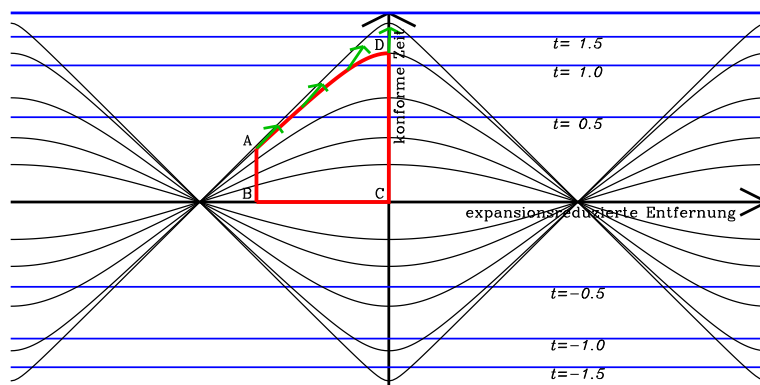


Abbildung 16: Karte des deSitter-Modells in Mercator-Projektion mit Geodätenschar

Wieder folgen wir Mercators Idee und ändern wir den Maßstab der Meridiane, d.h. den Maßstab, mit dem die Zeit dargestellt wird, bis die Registrierkurven eines Lichtsignals wieder als Gerade mit fester Neigung gezeichnet werden können. Dann ist es leicht, Relativgeschwindigkeiten richtig zu bewerten.

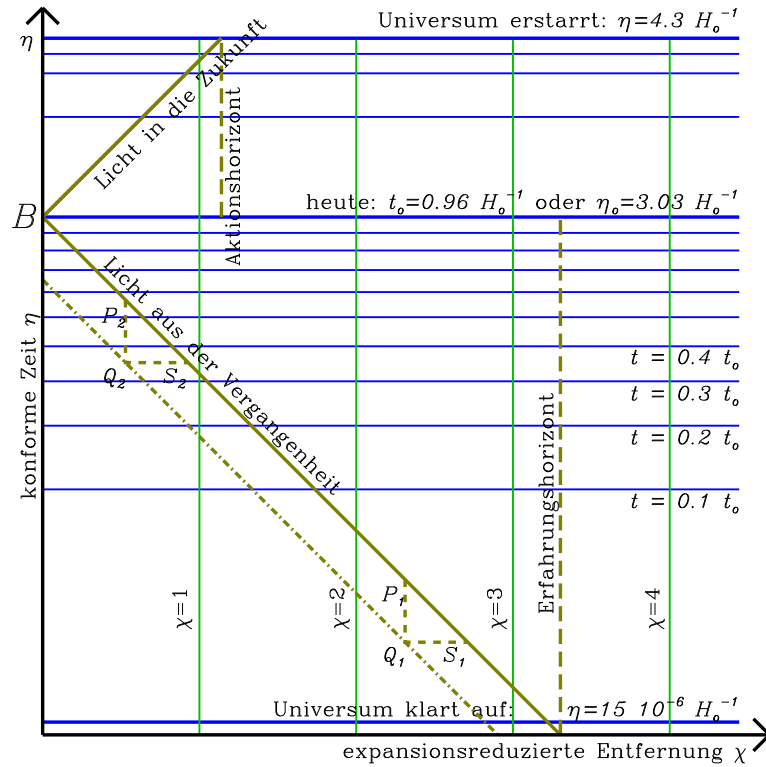


Abbildung 17: Karte des expandierenden Universum in Mercator-Projektion

Wir wählen nicht nur die expansionsreduzierte Entfernung, sondern auch eine Zeiteinheit, die sich an dieser Entfernung orientiert. Gemessen an dieser konformen Zeit braucht das Licht immer das gleiche Intervall für eine gegebene expansionsreduzierte Entfernung. Wenn zwei Galaxien gegeben sind, dann ist der Schlag der konformen Zeit die Ankunft eines zwischen diesen Galaxien hin und her laufenden Lichtsignals. Die Konformzeit zeigt so etwas wie die „biologische“ Uhr des Universums. In konformer Zeit hat das Universum eine endliche Lebensdauer. In ferner Zukunft kann sehr viel Zeit vergehen, ohne dass noch etwas geschieht, weil zwischen den Nachbarn keine Signale mehr die Distanzen überbrücken können. Auch wenn die Atomzeit bis ins Unendliche läuft, der Herzschlag des Universums kommt zum Stehen. Das Universum hat sowohl einen Erfahrungshorizont als auch einen Aktionshorizont, weil die Konformzeit sowohl einen Anfang als auch ein Ende hat.

Das bei  $B$  ankommende Lichtsignal hat einen Vorläufer (strichpunktiert). In der Karte bleiben räumliche und zeitliche Distanz fest ( $Q_1 S_1 = Q_2 S_2$  und  $Q_1 P_1 = Q_2 P_2$ ). Wegen des sich ändernden Maßstabs heißt das: Der richtige Abstand in Zeit wie in Raum nimmt mit der Expansion ständig zu. Das spiegelt sich in der zunehmenden Wellenlänge eines Photons (Rotverschiebung der entfernten Galaxien) ebenso wie in der Verringerung der Frequenz einer Photonenfolge (z.B. der Verringerung der Abklingrate einer Supernova).

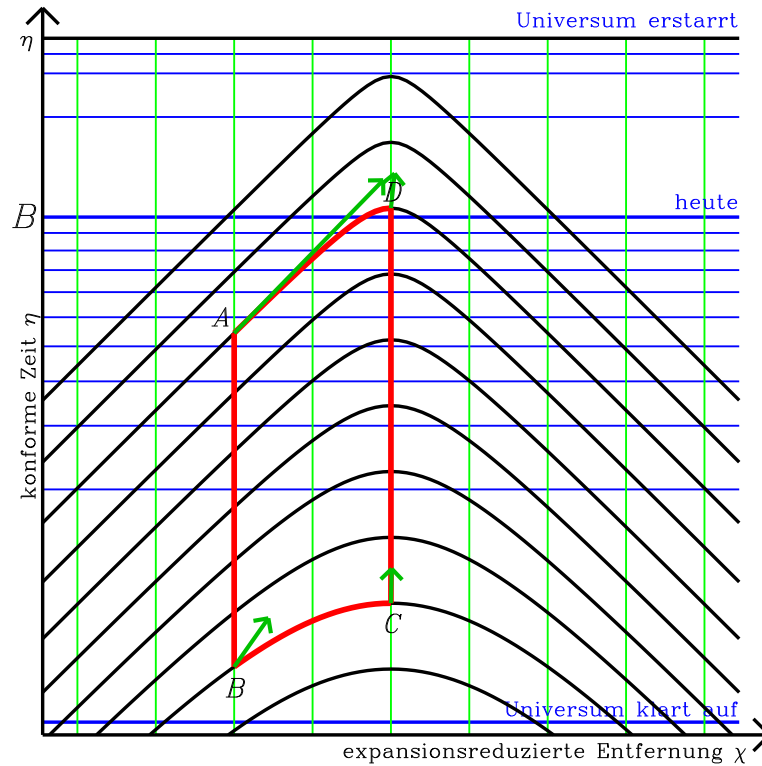


Abbildung 18: Geodäten in der Mercatorprojektion eines expandierenden Universums

Von den geraden Linien in der Mercator-Projektion sind nur die Linien konstanter mitbewegter Koordinate Geodäten. Die Linien fester Zeit sind es nicht. Kurven, die in spätere Zeiten ausweichen, sind länger (Geodäten in der Orts-Zeit-Ebene sind **längste** Linien, wie wir in der speziellen Relativitätstheorie lernen). Wir zeichnen eine Geodätenschar, deren maximale Zeit auf einem gewählten Meridian liegt. Alle anderen Geodäten erhält man wegen der Rotationssymmetrie durch horizontale Verschiebung der gezeichneten Geodäten.

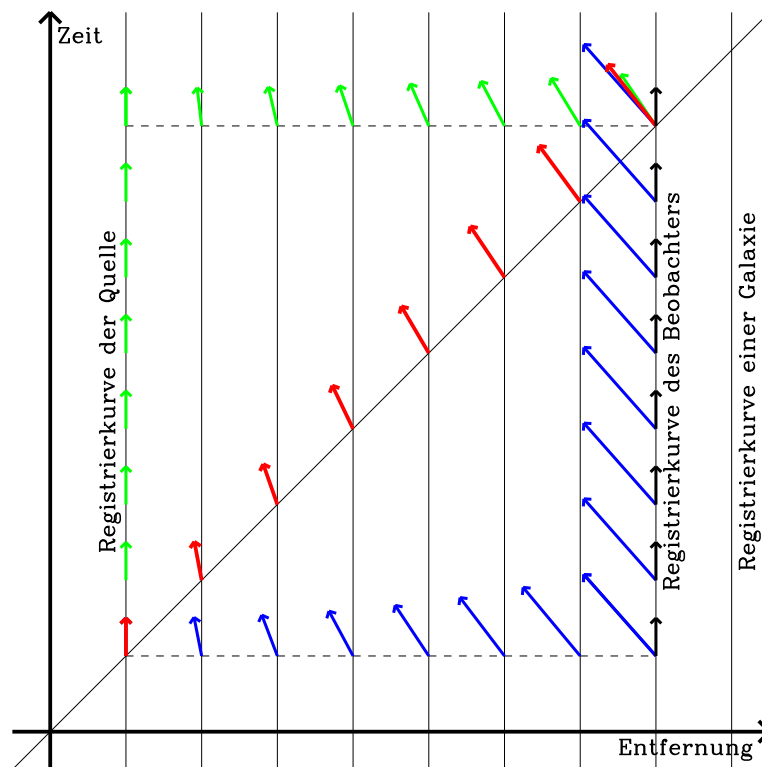


Abbildung 19: Drei Wege zum Transport des Geschwindigkeitsvektors einer beobachtbaren Galaxie

Das Ergebnis der Parallelverschiebung im Einstein-deSitter-Modell. Gezeichnet ist ein Registrierblatt, auf dem nicht nur der Maßstabsfaktor reduziert ist, sondern auch die (vertikale) Zeitkoordinate einen variablen Maßstab hat, damit die Lichtlinien wieder gewohnte Geraden mit den gewohnten Neigung werden. Drei Wege von der Quelle zum Beobachter werden verglichen und zeigen verschiedene Ergebnisse, weil die Union von Raum und Zeit gekrümmt ist (auch wenn der Raum selbst hier nicht gekrümmt ist).

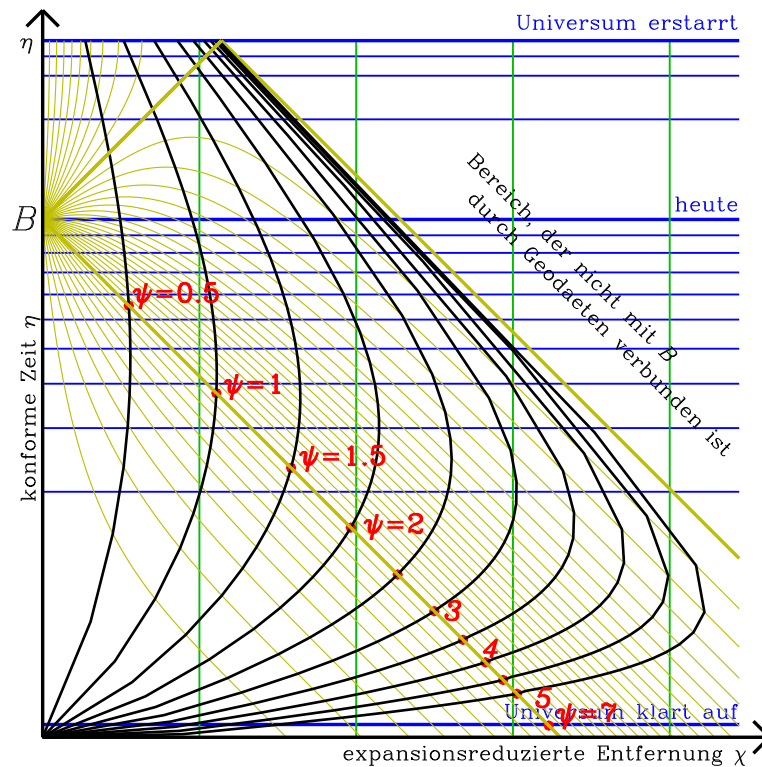


Abbildung 20: Relativgeschwindigkeiten der Galaxien im Universum

Dies ist eine Karte der Funktion  $\psi = \text{Arth}[v/c]$  der Relativgeschwindigkeit für das Standardmodell von 2004. Der Transport wird entlang der Geodäten geführt, die das jeweilige Ereignis mit  $B$  verbinden. Jenseits des so zugänglichen Bereichs finden wir naturgemäß keine Werte, und der Rand des Bereichs signalisiert Lichtgeschwindigkeit. Die Methode des Transports längs der Geodäten ist aber nur eine der möglichen. Der Transport längs der Linien fester Zeit erreicht alle Ereignisse, und nirgendwo wird Lichtgeschwindigkeit erreicht