Relativitätstheorie zum Mitmachen

Sonntagsvorlesung

Dierck-E.Liebscher,
Astrophysikalisches Institut Potsdam,
http://www.aip.de/~lie/, deliebscher@aip.de

Was kann an der Relatvitätstheorie zum Mitmachen sein? Wieso kann man mitmachen, wenn man noch nicht mehr als das in der Schule Gelernte beitragen kann? Was kann ich mitmachen, wenn mir der Umgang mit den vielen Formeln schwer fällt und alles so unanschaulich ist?

Wir müssen – in diesem Zusammenhang vielleicht unerwartet – die eigentliche Anschaung einbeziehen, die Geometrie. Das sind nicht die Skizzen zu ansonsten formelseitig dargestellten Sachverhalten, sondern richtige Geometrie mit Spiegelung, Drehung und Kongruenz, Längen, Winkeln, Geraden und Dreiecken. Das Einzige, was neu sein wird, und woran wir uns gewöhnen müssen, ist der Unterschied zwischen der gewohnten Zeichenebene und dem Registrierstreifen, auf dem wir arbeiten werden.

Auch ohne große Vorbereitung kann dann jeder die grundlegenden Schlüsse der Relativitätstheorie selbst nachvollziehen. Das ist möglich, weil die Relativitätstheorie ein Bild der geometrischen Verhältnisse in Zeit und Raum ist, und weil im einfachsten Falle Raum und Zeit auf einem Registrierstreifen dargestellt werden können. Wir nehmen also Papier, Bleistift und Lineal zur Hand und schon kann es losgehen.

Es geht in der Relativitätstheorie zunächst um die zutreffende Beschreibung elementarer Bewegung. Wir können uns auf die eindimensionale Bewegung längs einer geraden Schiene (Gardinenstange) beschränken (Abb. 1). Das läuft ab wie bei jedem anderen Streifenregistriergerät, das wir vom Elektrocardiogramm, vom Elektroencephalogram, vom Seismographen kennen (Abb. 2). Wir zeichnen die Bewegung auf dem Rouleau auf, das wir möglichst gleichmäßig wie einen Registrierstreifen nach unten ziehen. Wenn wir uns nun daran erinnern, dass unbeeinflusste Bewegung geradlinig gleichförmig verläuft, dann wissen wir, dass sie auf dem Registrierstreifen gerade Linien zeichnen muss. Die Vertikale entsteht, wenn der Schreiber auf der Stange sitzt und sich nicht bewegt. Je schneller er sich bewegt, desto stärker ist seine Spur gegen die Vertikale geneigt (Abb. 3).

Wir wollen uns keinen Kopf um konkrete Kräfte und Wechselwirkungen machen und betrachten deshalb ausschließlich Stöße und Reflexionen als Unterbrechung der unbeeinflussten Bewegung. Zwischen den Stößen zeichnen die Objekte gerade Weltlinien, die Stöße selbst sind nur plötzliche Richtungsänderungen. Damit sind wir bei der einfachen Geometrie der Dreiecke.

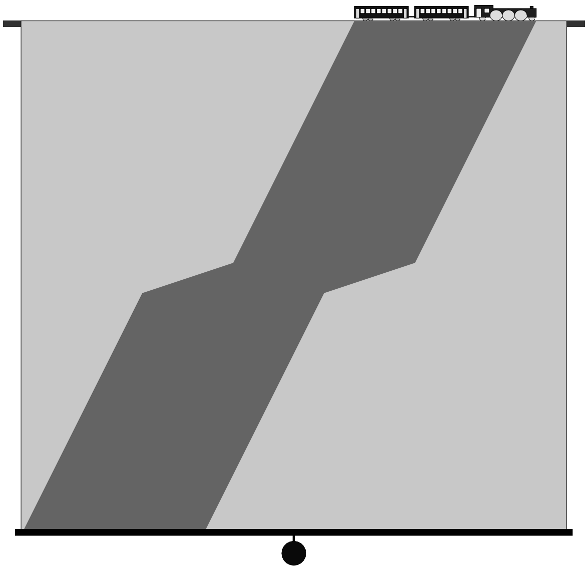


Abbildung 1: Einstein-Zug auf der Gardinenstange. Wir ziehen das Rouleau herunter, während der Zug gleichförmig über die Stange fährt. Der Knick in der Mitte ist einer Hemmung beim Abrollen geschuldet und soll uns daran erinnern, nicht zu vorschnell über die Bewegung des Zuges zu urteilen

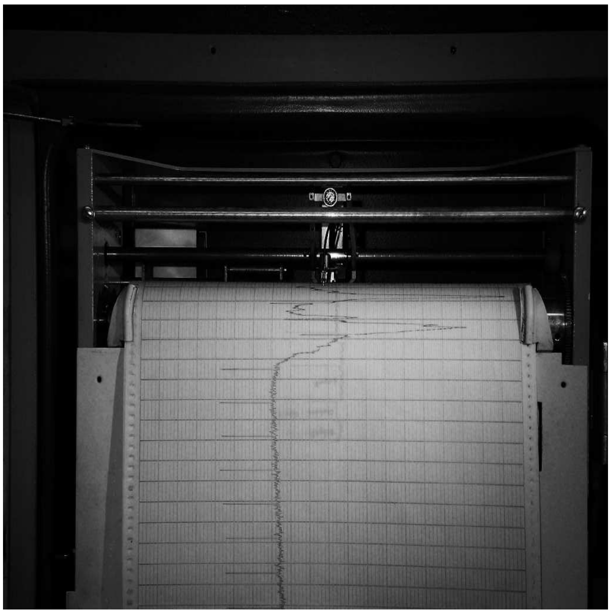


Abbildung 2: Registrierstreifen für die Radiostrahlung der Sonne

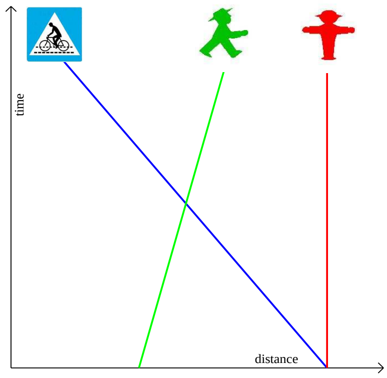


Abbildung 3: Der Registrierstreifen. Ein unbeweglicher Körper zeichnet eine Vertikale. Die Neigung entspricht der Geschwindigkeit

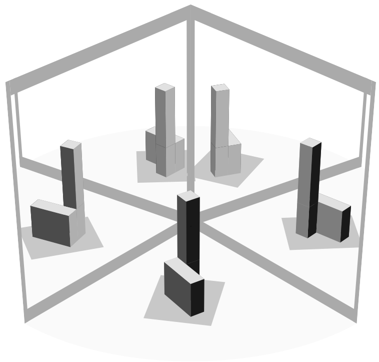


Abbildung 4: Zwei Spiegelungen (hier im Winkelspiegel des euklidischen Badezimmers) ergeben eine Drehung um die Schnittgerade der beiden Spiegel

Schon in der fünften Klasse wird im Unterricht darauf eingegangen, dass Drehungen und Verschiebungen (mit denen wir unter Anderem die Kongruenz von Figuren testen) aus jeweils zwei Spiegelungen erzeugt werden können (Abb. 4). Spiegelbilder zeigen gleichen Längen und Winkel. Genauer: Längen und Winkel sind gleich (in der Geometrie nennt man das auch *kongruent*), wenn sie durch eine Folge von Spiegelungen in gleiche Lage gebracht (d.h. bewegt) werden können. Wir beginnen mit der Festlegung, wie die Spiegelung zu konstruieren ist: erst danach vergleichen wir Längen und Winkel in verschiedener Lage.

Der Rückgriff auf Spiegelungen erscheint in der euklidischen Geometrie nicht als besonderer Vorteil, weil die Konstruktion der Spiegelung den Zirkel bereits benutzt, also die Eigenschaft der Drehung *voraussetzt* (Abb. 5). Auf unserem Registrierstreifen ist jedoch die Spiegelung auch praktisch das einfachere Konzept und die Konstruktion der Drehung mit Hilfe der Spiegelung wird unentbehrlich. Da wir die Geometrie so einrichten wollen, dass sie die mechanischen Phänomene beschreibt, müssen wir die mechanischen Spiegelungen für die geometrischen nehmen und aus ihnen 'Drehungen' erzeugen.

Nehmen wir den anschaulichen Fall der Spiegelung der Bewegung eines Tennisballs an einem (ideal schweren) Racket. Wäre das Racket eine feste Wand, würde die Geschwindigkeit des Balls unmittelbar nach der Reflexion nur das

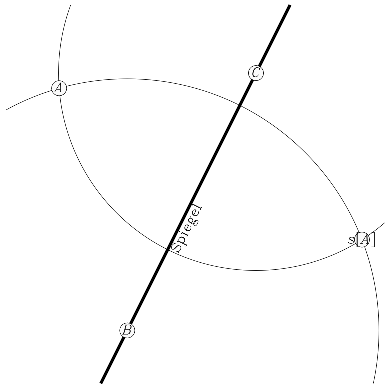


Abbildung 5: Euklidische Konstruktion der Spiegelung. Wenn Punkt A an der Geraden s gespiegelt werden soll, wählen wir uns zwei Punkte P und Q auf der Geraden s und suchen $s[A]$ als den Punkt der von P und von Q ebenso weit wie A entfernt ist. Also heißt es, mit dem Zirkel in P einzustechen und einen Kreis durch A zu ziehen und dann in Q einzustechen und wieder einen Kreis durch A zu ziehen. Der zweite Schnittpunkt ist das Spiegelbild $s[A]$

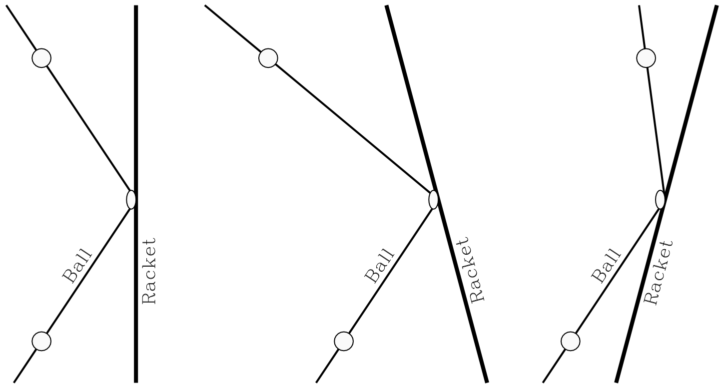


Abbildung 6: Einfache Spiegelung nach Erwartung eines Tennis-Cracks

Vorzeichen wechseln. Wenn sich das Racket auf den Ball zu bewegt, ist die Geschwindigkeit des Balls nach dem Schlag größer als vorher. Es ist die Differenz der Geschwindigkeiten von Ball und Racket, die das Vorzeichen tauscht (Abb. 6).

Sehen wir uns diese Reflexion auf dem Registrierstreifen genauer an (Abb. 7). Die Zeichnung 7 zeigt uns, wie man vorgehen muss. Mit drei Zeitmarken und der Übertragung der Strecke AO auf die zweite Marke finden wir das Spiegelbild der Gerade durch AB. Es ist die Gerade durch BC. Stellen wir nun A als Schnittpunkt mehrerer Geraden dar, muss der Schnittpunkt der Spiegelbilder das Spiegelbild von A selbst sein. Wir registrieren die Spiegelung der Fragmente einer Explosion bei A (Abb. 8). Das Spiegelbild $s[A]$ ist gleichzeitig zu A. ($s[A]$ liegt auf einer Horizontalen mit A. Die Horizontalen beschreiben die Ereignisse zu einer bestimmten Stellung des Registrierstreifen.)

Das kommt uns ganz selbstverständlich vor, ist aber eigentlich schon sehr merkwürdig. Wenn wir nämlich daran denken, dass wir den Abstandsvergleich

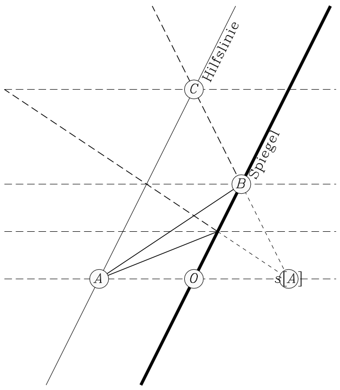


Abbildung 7: Einfache Spiegelung nach Galileo

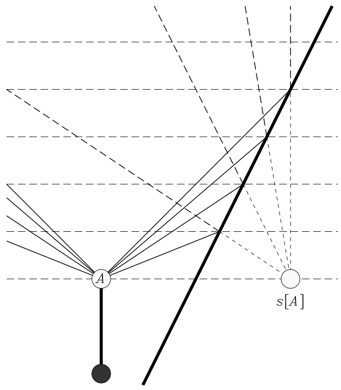


Abbildung 8: Explosion

mit der Spiegelung bestimmen wollen, dann sind A und $s[A]$ von einem Punkt B auf der Spiegelgeraden gleichweit entfernt, schließlich ist $Bs[A]$ das Spiegelbild von BA. Der raumzeitliche Abstand zweier Ereignisse ist also zunächst die Zeit, die auf der Uhr abläuft, die den Registrierstreifen steuert und nicht von der zweiten, räumlichen Komponente des Weltlinineintervalls abhängt. Wir wollen uns aber hier nicht weiter aufhalten, sondern gleich zum springenden Punkt kommen. Das Licht wird nämlich nicht nach dieser Regel gespiegelt. Die Geschwindigkeit eines Lichtsignals wechselt das Vorzeichen *unabhängig* von der Geschwindigkeit des Spiegels.

Das wird durch das Ergebnis eines berühmten Versuchs nahegelegt, der von A.Michelson zum ersten Mal im Keller unter der Ostkuppel des Astrophysikalischen Observatoriums Potsdam durchgeführt wurde. Es war Einstein, der (24 Jahre später) sah, dass man die ganze logische Kette der Geometrie von Raum und Zeit aus einer einzigen Forderung ableiten kann, dem Prinzip der (bei Zusammensetzungen!) unveränderlichen Lichtgeschwindigkeit. So hat er in der Folge die Relativitätstheorie entwickelte, von der wir hier die geometrischen Aussagen nachvollziehen wollen. Die Registrierkurven von Lichtsignalen sind wieder Geraden, diesmal sehr hoher Neigung gegen die Vertikale. Eine Schar paralleler Geraden wird von den nach rechts eilenden Lichtsignalen gezeichnet, die andere von den nach links eilenden. Wenn wir die Lichtgeschwindigkeit als Einheit der Geschwindigkeit wählen, finden wir eine bequeme Eselsbrücke: Die Lichtlinien sollen den Winkel zwischen Vertikale und Horizontale nach gewohntem Maß halbieren. Der Registrierstreifen wird dann also mit der Geschwindigkeit von einem Lichtjahr pro Jahr herausgezogen.

Wir nehmen als Ausgangspunkt:

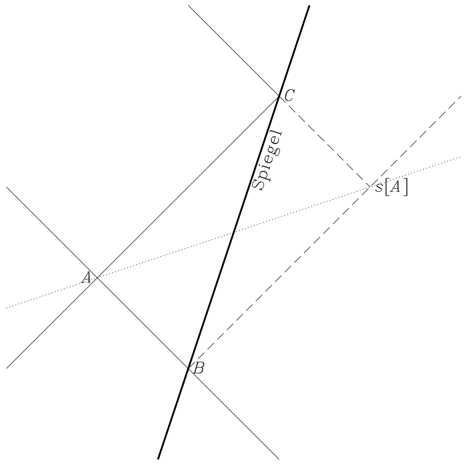


Abbildung 9: Lichteck. Die zwei Lichtsignale durch ein Ereignis und ihre Spiegelungen definieren ein Viereck. Eine Diagonale ist die spiegelnde Gerade, die andere verbindet das Ereignis mit seinem Spiegelbild und steht deshalb 'senkrecht' auf dem Spiegel. Natürlich: Senkrechtstehen und Spiegelung sind nicht die erwarteten euklidischen Prozeduren, wir zeichnen in einer Orts-Zeit-Ebene, nicht in der euklidischen Zeichenebene!

Bei Spiegelungen wird aus einer Lichtlinie wieder eine Lichtlinie. Die gespiegelten Lichtlinien unterscheiden sich nicht von den ungespiegelten, wie sich der Spiegel selbst auch immer bewegt.

Das ist der einzige Anhaltspunkt, aber er reicht aus, um alles zu entwickeln, und wir wollen es *selbst sehen*, wie dieses Wunder geschieht. Es reicht nämlich nicht, sich erzählen zu lassen, dass irgendetwas diese oder jene Ursache habe, oder das diese oder jene Maßnahme ein bestimmtes Ergebnis habe, man muss in der Lage sein, zumindest einige Zusammenhänge selbst nachvollziehen zu können. Was wir hier tun wollen, soll dafür ein Beispiel sein.

Das Spiegelbild eines Ereignisses A an einer geraden Weltlinie s muss mit dem Axiom der Lichtspiegelung konstruiert werden. Also ziehen wir durch A die beiden Lichtlinien und finden ihre Spiegelbilder an den Schnittpunkten B und C mit dem Spiegel s. Diese Spiegelbilder schneiden sich in $S[A]$, dem Spiegelbild von A. Wir sehen nun eine fundamentale Figur, das Lichteck (Abb. 9). Zeichnung 1 auf dem Arbeitsblatt wird entsprechend Abbildung 10 ausgefüllt.

Das Erste, was auffällt: Ein Ereignis muss *nicht mehr gleichzeitig* mit seinem Spiegelbild sein. Gleichzeitigkeit gibt es nicht absolut. Das ist unerwartet, aber unausweichlich, wenn wir das Lichtgeschwindigkeitsaxiom akzeptieren müssen. Wenn wir es genau bedenken, ist die Gleichzeitigkeit weit voneinander entfernter Ereignisse ohnehin nicht so einfach festzustellen, und unser Vorurteil erweist sich ohnehin als verwegen (Abb. 11).

Das Zweite: von einem Punkt D auf dem Spiegel sind A und $s[A]$ gleich weit entfernt. $ADs[A]$ ist ein gleichschenkliges Dreieck, DC seine Symmetrieachse

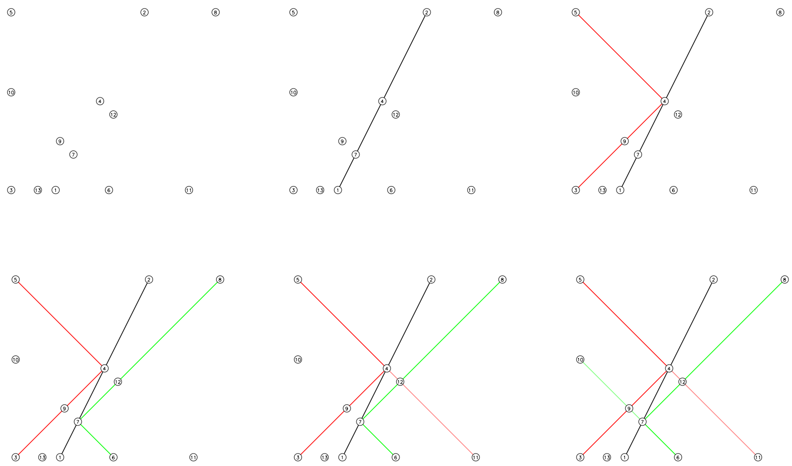


Abbildung 10: Wir zeichnen das Lichteck auf dem Arbeitsblatt, zunächst den Spiegel (1-2), dann das von links kommende Signal (3-4-5), dann das von rechts kommende (6-7-8). Wir verlängern die Geradenabschnitte und finden das Lichteck (7-12-4-9) als Grundkonstruktion der Spiegelung.

und Mittelsenkrechte der Seite $As[A]$. Wir zeichnen eine solche Situation wieder auf dem Abreitsblatt (Abb. 12) Sieht alles etwas ungewohnt aus, aber der Registrierstreifen ist eben keine normale Zeichenebene, sondern bildet vor allem die Zeit ab. Die Entfernung ist ein Zeitintervall, eine Dauer, gemessen etwa durch eine Uhr, die selbst dieses Weltlinienintervall vermöge ihrer Bewegung zeichnet. Das heißt, die Zeit scheint auf den Weltlinie nicht mehr in universell gleichem Metrum zu laufen. Das Metrum des Registrierstreifens ist das Metrum einer bezogen auf den Registrierstreifen ruhenden Uhr, die auf dem Registrierstreifen eine vertikale Spur hinterlässt. Die Länge eines Intervalls auf einer Vertikalen ist die Zeit, und zwar die Zeit der Uhr, die den Registrierstreifen steuert. Wenn wir das Intervall irgendwie in ein anderes spiegeln, ändern wir an den physikalischen Abläufen nichts, also auch nicht an der Zeit, die auf einer das gespiegelte Intervall zeichnenden Uhr abläuft.

Das ist eine verwunderliche Aussage, wenn wir mit unserem auf die Alltagserfahrung gestützten Vorurteil vergleichen. Im Alltag bewegen wir uns nur sehr langsam (selbst die Schallgeschwindigkeit ist nur ein *Millionstel* der Lichtgeschwindigkeit) und fahren ganz gut mit der Uhr des Registrierstreifens. Wir kommen gleich darauf zurück.

Die Länge eines Intervalls auf einer Weltlinie ist die Zeit, die auf einer Uhr abläuft, die diese Weltlinie auf den Registrierstreifen zeichnet.

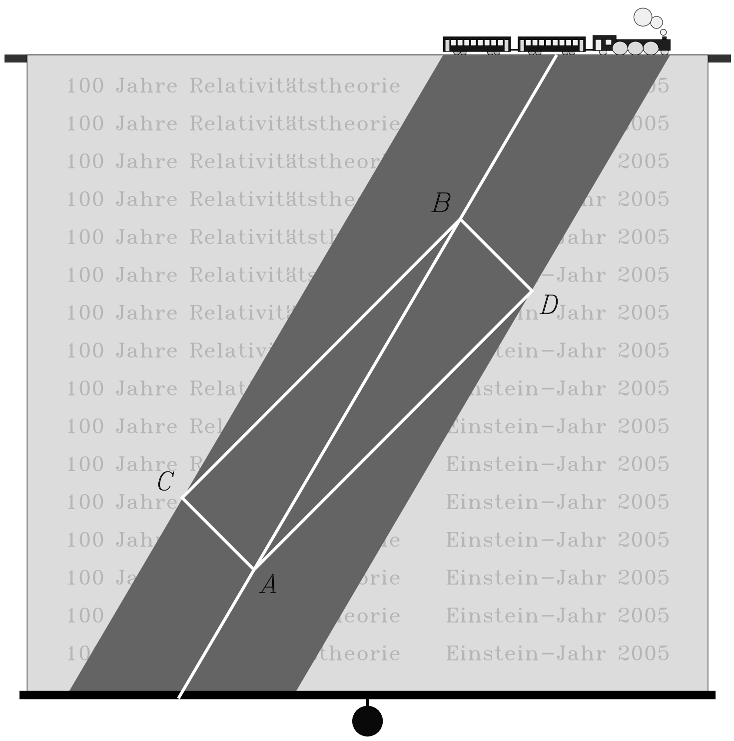


Abbildung 11: Synchronisation im Einsteinzug, klassische Darstellung. Ein Lichtsignal aus der Mitte des Zuges (A) synchronisiert die Uhren an seinen beiden Enden. Die dadurch erhaltenen, im Zug gleichzeitigen Ereignisse C und D sind auf dem Registrierstreifen nicht mehr gleichzeitig. Die Ereignisse sind aber spiegelsymmetrisch zur Weltlinie AB der Zugmitte.

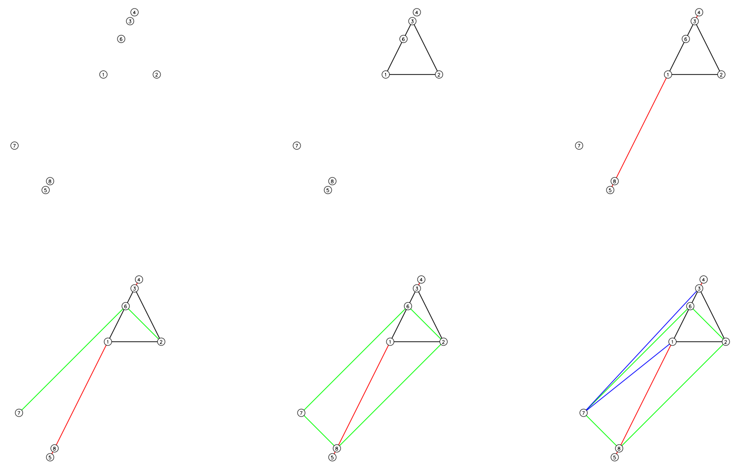


Abbildung 12: Wir zeichnen das Spiegelbild eines augenscheinlich gleichschenkligen Dreiecks, zunächst das Dreieck (1-2-3) selbst, dann nehmen wir eine Seite (1-3) als Spiegel (4-5), spiegeln den dritten Punkt (2) mit einem Lichteck (2-6-7-8) in den Punkt (7) und vervollständigen das Bild. Wir sehen, wie sehr wir uns vor der euklidischen Assoziation hüten müssen, nach der die beiden Dreiecke (1-2-3) und (1-7-3) überhaupt nicht kongruent erscheinen. Auf dem Registrierstreifen sind sie aber kongruent.

Das Dritte: Wenn die neue Spiegelung wirklich einen Längenvergleich gestatten soll, müssen sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden (Abb. 13). Der Nachweis ist eine schöne Anwendung eines bekannten Satzes über Parallelogramme.

Das Vierte: wenn ein vertikales Intervall in ein geneigtes gespiegelt wird, bleibt das Eigenzeitintervall gleich, aber die ablaufende Zeit des Registriergeräts wird größer. Die zum Registrieren benötigte Zeit ist größer als das von der bewegten Uhr angezeigte Zeitmaß. Diese Erscheinung heißt Zeitdilatation. Der Unterschied in den Zeitmaßen ist einer *Projektion* geschuldet, etwa der Projektion des geneigten Intervalls der bewegten Uhr auf die vertikale Zeitachse des Registrierstreifens. Uhren messen eine Dauer, nicht die Zeitkoordinate auf unserem Registrierstreifen. Die Uhr des Registrierstreifen ist kein wirklich gutes Mittel, um die Dauer eines Prozesses in einem bewegten Objekt zu messen: Ebenso muss ein Lineal anglegt und nicht irgendwie hingelegt werden. Ein fest orientiertes Lineal kann eine anders orientierte Stecke eben nicht messen, es muss angelegt, also in die gleiche Orientierung gebracht werden. Schließlich ändern sich bei Projektionen die Längen der *euklidischen* Geometrie. Wenn ein Stab in der Gesichtsfeldebene vor unseren Augen liegt, sehen wir ihn in voller Länge, dreht er sich aber aus der Ebene heraus, scheint er kürzer zu werden.

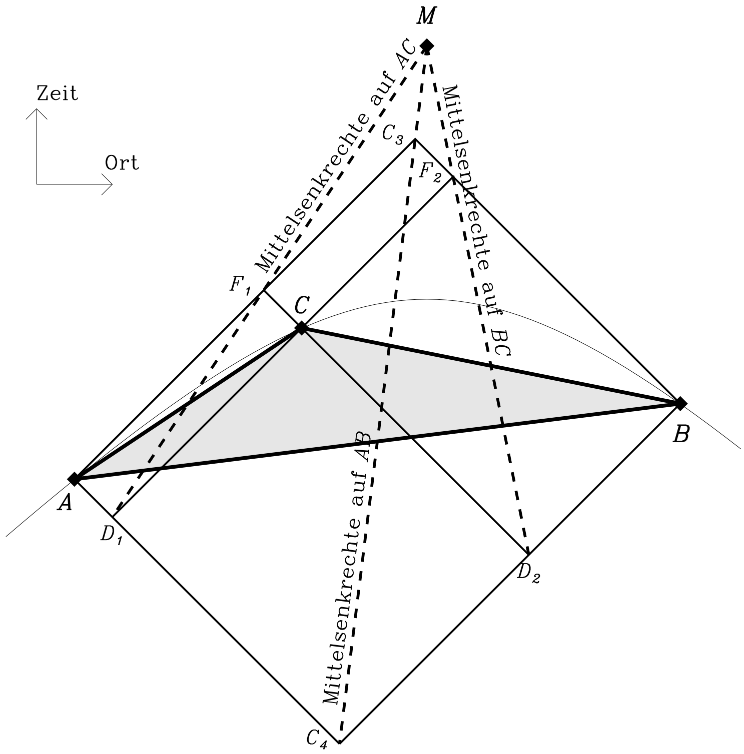


Abbildung 13: Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

In der gewohnten euklidischen Geometrie, im Raume finden wir nichts dabei, wenn die scheinbare Länge eines Stabes von der wahren (der Länge, die ein in die Richtung des Stabes gedrehtes Lineal zeigt) abweicht. Die scheinbare Länge wird unter anderem beim Weitsprung benutzt, wo die Weite ausschließlich in einer festen Richtung gemessen wird, unabhängig davon, ob die Richtung des Sprungs die gleiche ist. Im Gegensatz dazu wird bei den Wurfdisziplinen immer in der Richtung gemessen, die das Wurfgerät genommen hat. Schließlich kennen wir auch den Hinweis, den die Bürger von Schilda beachten müssen, wenn sie den Balken ins Rathaus tragen wollen. – Eine richtig messende Uhr muss sich also immer mit dem Objekt mitbewegen, dessen innere Prozesse ausgemessen werden sollen. Dieses Messergebnis wird *Eigenzeit* genannt.

In der Geometrie des Raums verkürzt sich die scheinbare Länge eines Stabes, weil seine tatsächliche Länge *gleich* bleibt, weil sich die atomare Struktur des Stabes sich eben *nicht* verändert. In unserer Geometrie der Zeit vergrößert sich scheinbar das Zeitintervall, weil es im Eigenmaß *gleich* bleibt, weil die Uhr eben ihr Metrum *nicht* ändert, wenn sie sich bewegt. Die Zeitdilatation hat etwas mit *Projektion* zu tun und *nicht* etwa mit einer physischen Änderung der Uhr selbst. Die Formulierung

Eine bewegte Uhr geht langsamer als eine ruhende

ist irreführend. Wenn man mit 'geht langsamer' eine physische Veränderung der Uhr assoziiert, ist die Aussage falsch. Die Zeitdilatation tritt auf, weil die bewegte Uhr *nicht* anders geht als die ruhende, so wie sich der Stab beim Herausdrehen aus der Gesichtfeldebene eben *nicht* ändert und gerade dadurch verkürzt erscheint. Auf dem Arbeitsblatt (Abb. 14) zeichnen wir zwei gegeneinander bewegte Uhren und zeigen, dass die Projektion eines Intervalls auf die jeweils andere Weltlinie immer länger ist als das Intervall selbst.

Wir spiegeln nun ein Intervall an zwei Geraden durch seine Endpunkte A und C (Abbildung 15). Die gespiegelten Richtungen schneiden sich in einem Punkt B und wir erhalten ein Dreiseit aus drei verschiedenen Weltlinien. Das Intervall AC beschreibt eine Uhr in gleichförmiger Bewegung. Die durch AB registrierte Bewegung führt von dieser Uhr weg, die durch BC registrierte Bewegung führt wieder zu ihr zurück. Wir messen die Länge dieser beiden Intervalle mit Uhren, die diese Bewegungen ausführen. Wir sehen: AB ist das Spiegelbild von AP, BC ist das Spiegelbild von QC. Die Summe der beiden Längen ist also kleiner als die Länge von AC. Der Umweg ABC ist *kürzer* als die direkte Verbindung AC. Das hört sich ganz trocken an, es ist aber der Inhalt des sogenannten Zwillingsparadoxons. Ein Reisender und ein Nesthocker trennen sich bei A. Die Weltlinie des Nesthockers ist eine Gerade bis der Reisende zurückkehrt. Der Reisende, mehr oder weniger in ständiger Bewegung, zeichnet eine Weltlinie, die keine Gerade sein kann, schließlich schneidet sie die Weltlinie des Nesthockers zweimal. Die letztere ist die Projektion der Weltlinie des Reisenden, also länger als jene. Länge der Weltlinie ist aber Dauer, gemessen mit einer mitgenommenen Uhr. Bei B stellt der Reisende fest, dass seine Uhr noch nicht so weit wie die des Nesthockers abgelaufen ist. Die Uhr ist dabei nicht nur ein bestimmtes Gerät, sondern steht stellvertretend für alle physikalischen und damit auch chemischen

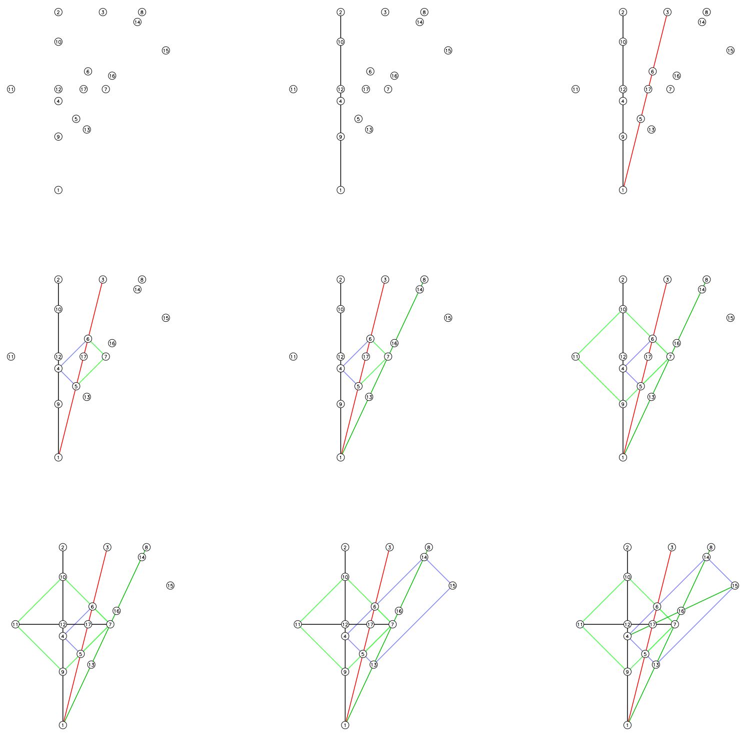


Abbildung 14: Wir zeichnen eine (hier vertikale) Weltlinie (1-2) und wählen einen Spiegel (1-3). Dann suchen wir das Spiegelbild (7) eines Punktes (4) auf der vertikalen Weltlinie mit dem Lichteck und ziehen die gespiegelte Weltlinie (1-8). Wir fällen mit dem Lichteck das Lot zunächst von dem neu gewonnenen Punkt (7) auf die alte Weltlinie (1-2) und dann von dem alten Punkt (4) auf die neue Weltlinie (1-8). Die Fußpunkte (12) und (16) beider Lote liegen oberhalb der Ausgangspunkte (4) und (7). Beide Projektionen sind jeweils länger als das projizierte Intervall (1-12 > 1-4 = 1-7 < 1-16). Die Figur wird vollständig symmetrisch um den anfangs gewählten Spiegel.

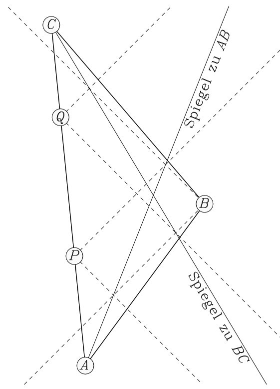


Abbildung 15: Das Zwillingsparadoxon

und biologischen Prozesse und deren Ablauf. Das ist schwer zu akzeptieren, weil unsere tägliche Erfahrung diesen Zeitunterschied nicht demonstriert. Sie kann das nicht, weil die technischen Geschwindigkeiten viel zu klein sind. 1 Mach ist erst ein Millionstel (10^{-6}) der Lichtgeschwindigkeit, und die relativen Zeitunterschiede sind nur 10^{-12}. Das hat man nicht mehr im Gefühl, da muss man ganz fein messen. Dann allerdings bestätigt sich die Theorie ohne jeden Fehler. Paradox erscheint allerdings, dass sich auch der Nesthocker seinerseits gegen den Reisenden ständig bewegt. Es wäre nun allerdings ein Fehlschluss, die Weltlinie des Reisenden ihrerseits als Projektion der Weltlinie des Nesthockers zu verstehen und zu erwarten, dass diese ihrerseits länger sein müsse. Das Intervall auf AC, das auf AB projiziert wird, ist noch kürzer als AP, und das Intervall auf AC, das auf BC projiziert wird, ist auch kürzer als QC. AC wird also von den beiden Projektionen überhaupt nicht erfasst. Es ergibt sich also kein Widerspruch. Kein Wunder, wir machen ja Geometrie mit Euklids Methoden, wenn auch nicht mit seiner Form der Spiegelung. Auf dem Arbeitsblatt (Abb. 16) wählen wir ein passendes Dreieck und spiegeln die vom Reisenden gezeichneten Seiten auf die Weltlinie des Nesthockers.

Zum Schluss sehen wir uns den Satz des Pythagoras und seine Übertrageung auf den Registrierstreifen an. Es geht um ein rechtwinkliges Dreieck, über dessen Seiten wir Quadrate errichten, und um den Flächenvergleich dieser Quadrate. Die beiden Seiten, die den rechten Winkel bilden (a und b), heißen Katheten, die gegenüberliegende Seite (c) Hypotenuse. In der gewohnten euklidischen Geometrie finden wir:

Die *Summe* der Kathetenquadrate ist flächengleich dem Hypotenusenquadrat.

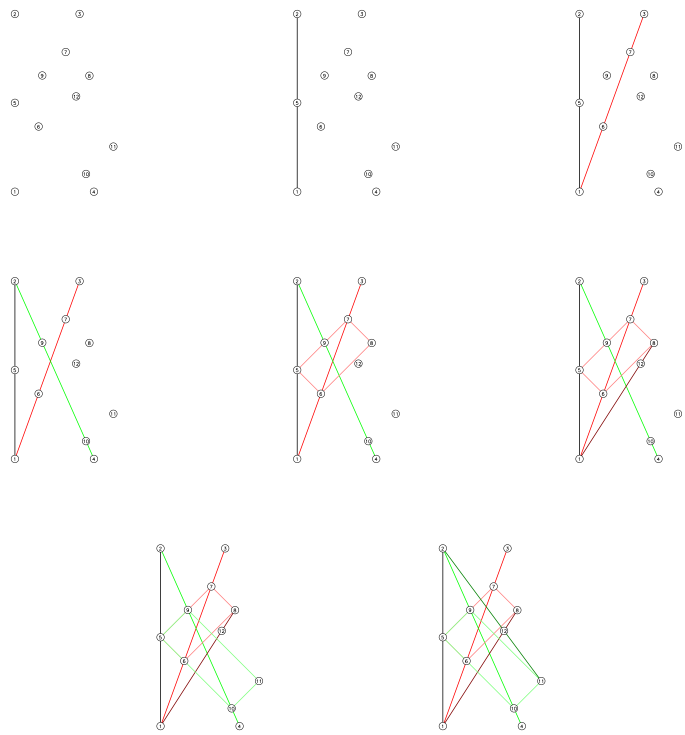


Abbildung 16: Wir zeichnen eine (hier vertikale) Weltlinie und wählen zwei Spiegel (1-3 und 2-4). Dann konstruieren mit zwei entsprechenden Lichtecken an einen Punkt (5) der Ausgangslinie das Weltlinienpaar eines Reisenden, das sich im Wendepunkt (12) schneidet. Der Abstand des Wendepunkts von den Endpunkten ist in beiden Fällen kleiner als der Abstand der Spiegelbildes von den Endpunkten (1-12 $>$ 1-8 $=$ 1-5 und 12-2 $<$ 11-2 $=$ 5-2). Der Umweg (1-12-2) ist kürzer als der direkte (1-2).

Mit unserer Spiegelung auf dem Registrierstreifen ergibt sich dagegen

> **Die *Differenz* der Kathetenquadrate ist flächengleich dem Hypotenusenquadrat.**

Wie das zustandekommt, wollen wir uns ansehen (Abb. 17) Dabei verwenden wir natürlich die Definition des rechten Winkels und die Tatsache, dass Verschiebungen die Fläche nicht ändern. Wir verwenden aber *nicht* die 'Drehung' (die sich ja auf dem Registrierstreifen gerade von der von der euklidischer Geometrie gewohnten unterscheidet). Auch auf dem Registrierstreifen können wir die Beweisstrategie Euklids verwenden.

Wenn die Spiegelung definiert ist, kennen wir Rechtecke. Das Quadrat ist das besondere Rechteck. Im Falle der euklidischen Geometrie ist es das Rechteck, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Auf dem Registrierstreifen gibt es ein solches Rechteck nicht. Hier ist das Quadrat unter den Rechtecken dadurch ausgezeichnet, dass seine Diagonalen auf sich selbst senkrecht stehen, d.h. Lichtlinien sind. In der Abbildung sind links die Schritte in der euklidischen Geometrie, rechts in der Registrierstreifengeometrie (der pseudo-euklidischen Geometrie der Raum-Zeit, die auch Minkowski-Geometrie genannt wird) dargestellt. Der Beweis geschieht in beiden Fällen durch flächenerhaltendes Verscheren der Kathetenquadrate.

Literatur

[1] Bachmann,F.: *Der Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, J.Springer Verlag, Heidelberg (1959).

[2] Born, M.: *Die Relativitätstheorie Einsteins*, 4. Aufl., Springer, Berlin (1964).

[3] Jaglom,I.M.: *Princip otnositelnosti Galileja i neevklidova geometrija*, Izd. Nauka, Moskva (1969).

Yaglom,I.M.: *A simple noneuclidean geometry and its physical basis*, Springer Verlag, New York et al. (1979).

[4] Landau,L.D., Rumer,Ju.B.: *Was ist die Relativitätstheorie*, Akad.Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig (1962).

[5] Liebscher, D.-E.: *Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene*, Teubner, Leipzig (1999).

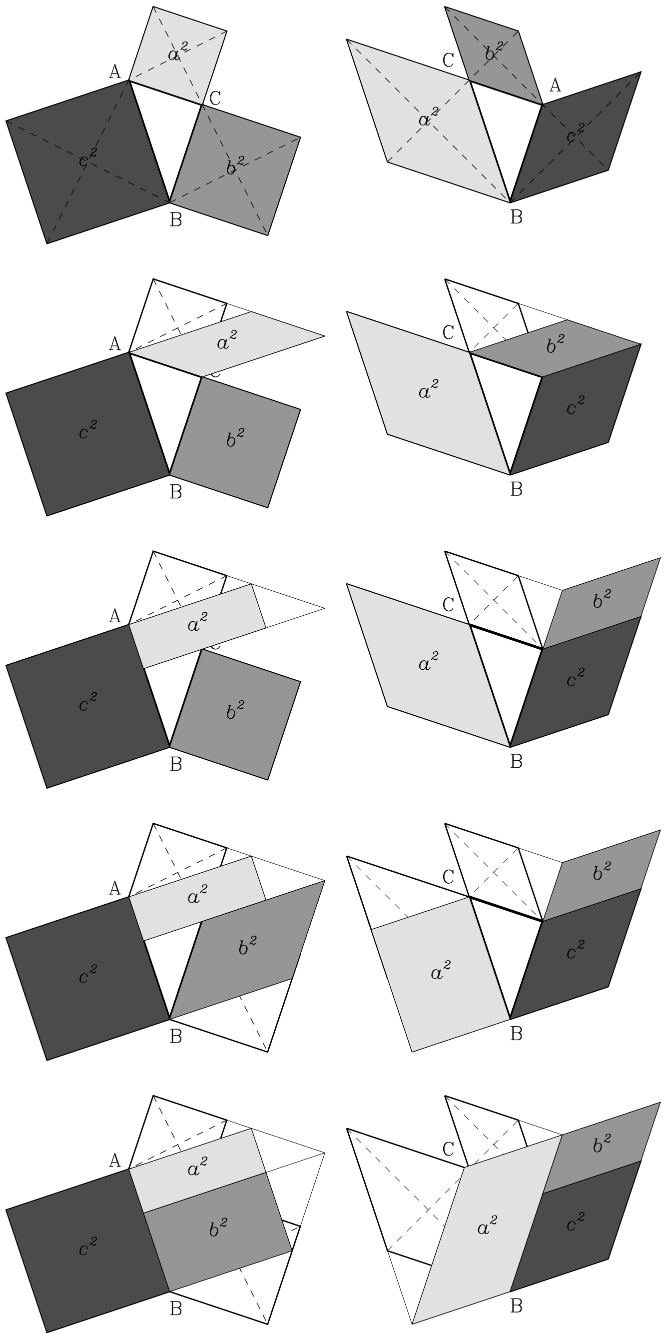


Abbildung 17: Pythagoras nach Euklid (links) und auf dem Registrierstreifen (rechts)

Relativitätstheorie zum Mitmachen: Arbeitsblatt

5 2 8

Zeichnung 1
Lichteck

10

4

12

9

7

3 13 1 6 11

1 – $(7 - 4)$ – 2: Spiegel

3 – (9) – 4 – 5: Lichtsignal

6 – 7 – (12) – 8: Lichtsignal

(6) – 7 – 9 – 10: Verlängerung

11 – 12 – 4 – (5): Verlängerung

13 – 7: Verlängerung

4

3

6

Zeichnung 2
Längenvergleich

1 2

7

8

5

1 – 2 – 3: Dreieck

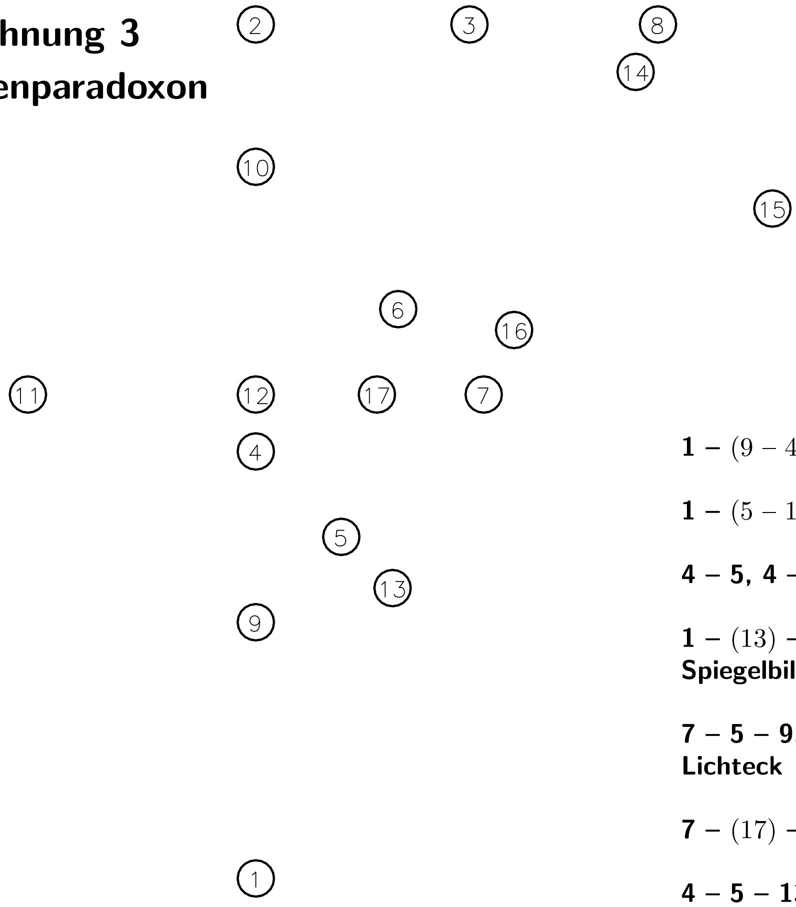
4 – 3 – (6) – 1 – (8) – 5: Spiegel

2 – 6 – 7 und 2 – 8 – 7: Lichteck

1 – 7 – 3: gespiegeltes Dreieck

7 – 3 = 2 – 3 (= 1 – 3): gleiche Längen

Zeichnung 3
Uhrenparadoxon



1 – (9 – 4 – 12 – 10) **– 2: Bezug**

1 – (5 – 17 – 6) **– 3: Spiegel**

4 – 5, 4 – 6, 5 – 7, 6 – 7: Lichteck

1 – (13) **– 7 –**(16 – 14) **– 8:**
Spiegelbild in Bewegung

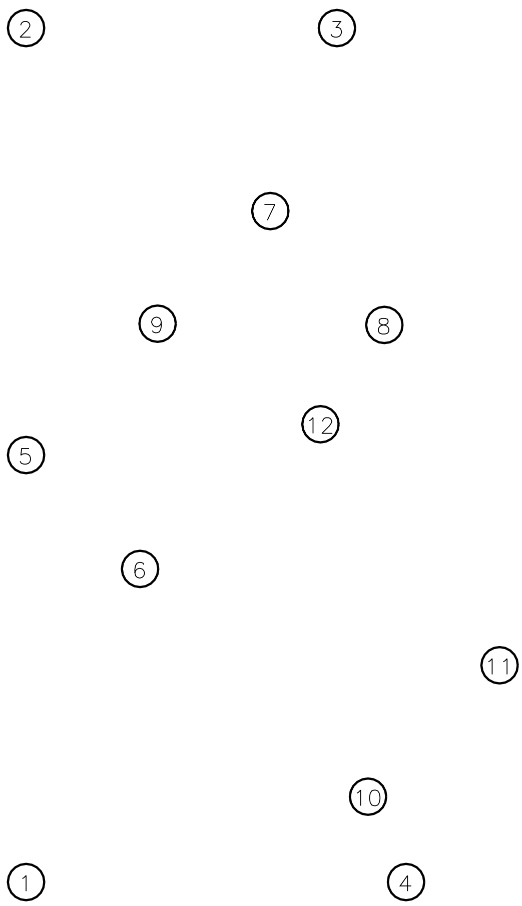
7 – 5 – 9, 7 – 6 – 10, 9 – 11, 10 – 11:
Lichteck

7 – (17) **– 12 – 11: Lot auf 1 – 2**

4 – 5 – 13, 4 – 6 – 14, 13 – 15, 14 – 15:
Lichteck

4 – 17 – 16 – 15: Lot auf 1 – 8

Zeichnung 4
Zwillingsparadoxon



1 – (5) **– 2: Nesthocker**

1 – (6 – 7) **– 3: erster Spiegel**

2 – (9 – 10) **– 4: zweiter Spiegel**

5 – 6, 5 – (9) **– 7, 6 – 8, 7 – 8: Lichteck**

1 – (12) **–8: Zugvogel im Abflug**

(5) **– 9,** (5) – **6 – 10, 10 – 11, 9 – 11: Lichteck**

11 – 12 – 2: Zugvogel im Rückflug