Der kürzeste Weg zu $E = mc^2$

Dierck-E.Liebscher,
Astrophysikalisches Institut Potsdam,
http://www.aip.de/~lie/, deliebscher@aip.de

Anhand der Geometrie auf einem Registrierstreifen eindimensionaler Bewegung wird die Bedeutung der drei Newtonschen Axiome erläutert. Mit Hilfe der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bei Spiegelung auch an einem bewegten Spiegel wird der symmetrische Zerfall eines Körpers geometrisch analysiert und die Veränderlichkeit der Masse sichtbar vorgeführt. Zur Definition der Energie wird das Hebelgesetz herangezogen. Die geometrisch sichtbare Veränderlichkeit der Masse wird in die Formel $E = mc^2$ *umgewandelt.*

Der Registrierstreifen

Einsteins Relativitätstheorie ist genial – nicht weil sie so schwierig, sondern weil sei so einfach ist! Wenn man sich an ganz elementare Geometrie und die Newtonschen Anfangsgründe der Mechanik erinnern lässt, dann weiß man genug um zu verstehen, was das alles soll, die Zeitdilatation, das Zwillingsparadoxon, die Längenkontraktion, die Relativität der Gleichzeitigkeit und vor allem die wohl berühmteste Formel der Wissenschaft: $E = mc^2$.

Der Schlüssel ist die richtige zeichnerische Darstellung der Bewegung: Wir verlassen die zweidimensionale Zeichenebene und benutzen den Registrierstreifen, auf dem eine Richtung die Zeit darstellt. Wir kennen ihn vom Elektrocardiogramm, vom Elektroencephalogram, vom Seismographen. Wir lassen die Bewegung auf einer Schiene ablaufen, etwa auf der Gardinenstange (Abbildung 1). Wir beschreiben nun nicht mehr die Bewegung einzelner Stifte quer zum Streifen, sondern die allgmeine Bewegung auf der Schiene, und registrieren sie auf dem Rouleau.

Sehen wir uns also einen Registrierstreifen an. Die Bewegungsrichtung der betrachteten Körper ist waagerecht, der Streifen wird nach unten herausgezogen. Die auf den Registrierstreifen gezeichneten Kurven sind Bewegungsprotokolle. Wir nennen sie Weltlinien. Ein ruhender Körper schreibt eine vertikale Gerade, ein sich bewegender Körper eine gegen die Vertikale geneigte Weltlinie. Je schneller der Körper, desto größer die Neigung seiner Weltlinie (Abbildung 2).

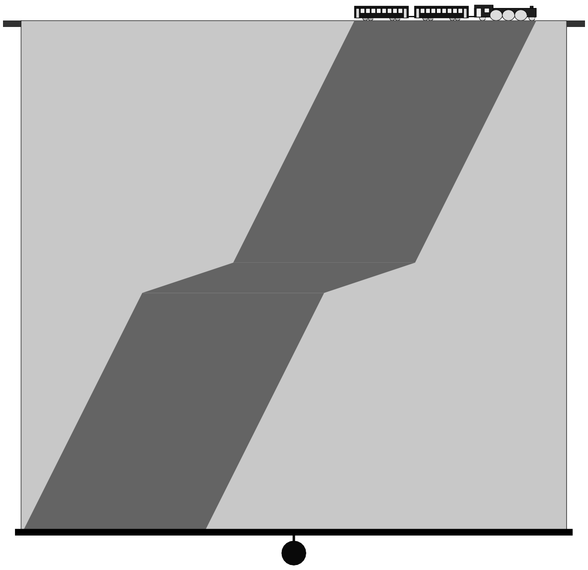

Abbildung 1: Einstein-Zug auf der Gardinenstange. Wir ziehen das Rouleau herunter, während der Zug gleichförmig über die Stange fährt. Der Knick in der Mitte könnte einer Hemmung beim Abrollen geschuldet sein und soll uns daran erinnern, nicht zu vorschnell über die Bewegung des Zuges zu urteilen

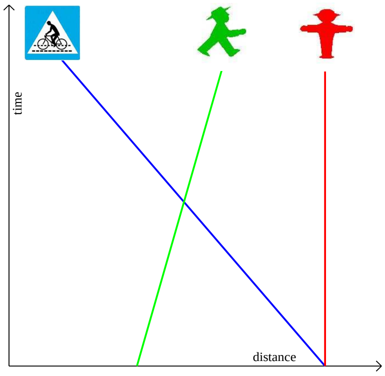

Abbildung 2: Der Registrierstreifen. Ein unbeweglicher Körper zeichnet eine Vertikale. Die Neigung entspricht der Geschwindigkeit

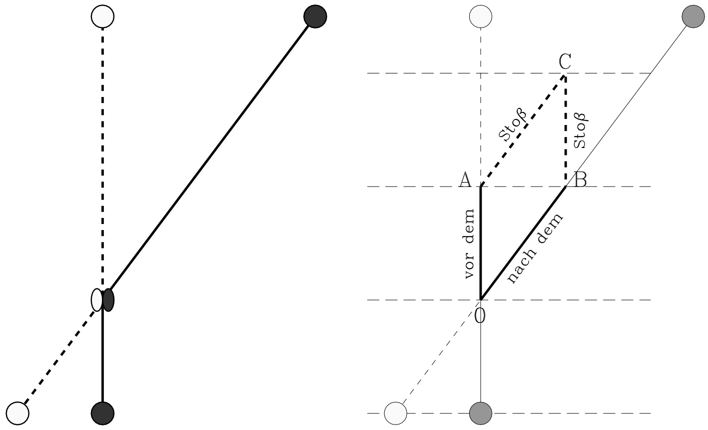

Abbildung 3: Der gerade zentrale Stoß zweier gleicher Steine. Rechts sind die Zeitmarken gezogen und die Geschwindigkeitsbilanz eingezeichnet

Das erste Axiom der Mechanik

Wir ziehen den Registrierstreifen so gleichförmig heraus, dass eine gleichförmige Bewegung auf der Waagerechten auch eine gewöhnliche gerade Weltlinie zeichnet. Wir müssen nichts Komplizierteres tun als Teilchen zu betrachten, die sich nur gelegentlich stoßen, sonst aber frei bewegen. Diese Teilchen zeichnen ein Geradennetz auf den Registrierstreifen, das wir mit elementarer Geometrie auswerten.

Die Weltlinien unbeeinflusster Körper bilden ein Netz von Geraden (Galileos Axiom der Mechanik).

Wir beginnen mit dem geraden Stoß, wie er manchmal beim Curling versucht wird. Der Spielstein bleibt nach dem Stoß unbeweglich liegen, der gestoßene Stein übernimmt die Bewegung. Der rechte Stein ruht also vor dem Stoß und zeichnet eine senkrechte Weltlinie. Beim Stoß übernimmt er die Geschwindigkeit des Spielsteins, der seinerseits liegen bleibt. Die Summe der Geschwindigkeiten bleibt erhalten (und dies gilt auch, wenn der gestoßene Stein sich bereits vor dem Stoß bewegt). Wir ziehen zwei Zeitmarken und finden ein Viereck der Geschwindigkeiten, das die Erhaltung der Geschwindigkeitssumme zeigt (Abbildung 3).

Das zweite Axiom der Mechanik

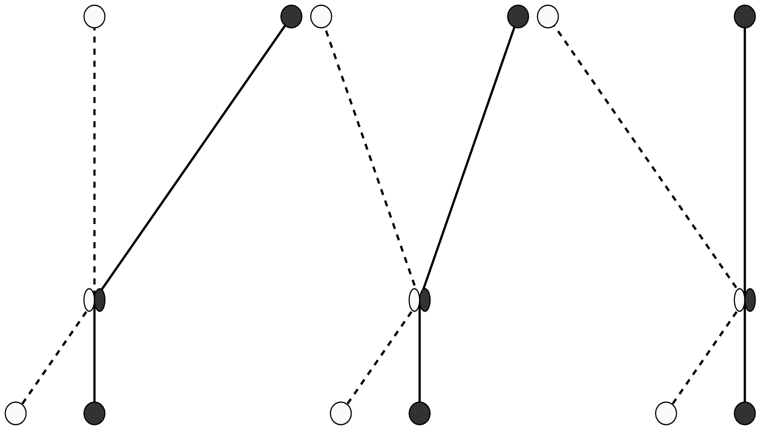

Abbildung 4: Der gerade zentrale Stoß zweier ungleicher Steine. Rechts ist der Fall eines sehr schweren Zielsteins angegeben

Sind die Steine verschieden, was beim Curling natürlich gerade vermieden werden muss, dann bleibt die Summe der Geschwindigkeiten nicht mehr erhalten. Im Extremfall, wenn der angespielte Stein befestigt ist, ändert die Summe der Geschwindigkeiten sogar ihr Vorzeichen (Abbildung 4). Sind die Steine verschieden, geht also die Erhaltung der Summe der Geschwindigkeiten verloren. Ist der gestoßene Stein größer, übernimmt er die Geschwindigkeit des Spielsteins nicht vollständig, und der Spielstein prallt ein wenig zurück. Versuchen wir, das Geschwindigkeitsviereck zu zeichnen, dann sehen wir, dass es sich nicht mehr schließt. Die Summe der Geschwindigkeiten bleibt nicht mehr erhalten. Nur wenn wir die vom Spielstein übernommenen Seiten verkürzen, schließt sich das Viereck (Abbildung 5). Den Faktor der Verkürzung nennen wir Masse des Spielsteins, die Masse des gestoßenen Steins ist dabei die Einheit. Allgemein müssen die Geschwindigkeiten vor der Bilanz mit charakteristischen Faktoren multipliziert (d.h. gewichtet) werden, damit die Bilanz vor und nach dem Stoß wieder aufgeht. Diese Faktoren nennen wir Massen. Sie sind Eigenschaften der Körper, die sich in anderen Stoßkombinationen wiederfinden. Die mit der Masse gewichtete Geschwindigkeit heißt Impuls. Aus dem Geschwindigkeitsviereck ist ein Impulsviereck geworden (Abbildung 6).

Bei unbeeinflussten Stößen bleibt der Gesamtimpuls, die Summe der Impulse erhalten (Huygens' Axiom der Mechanik).

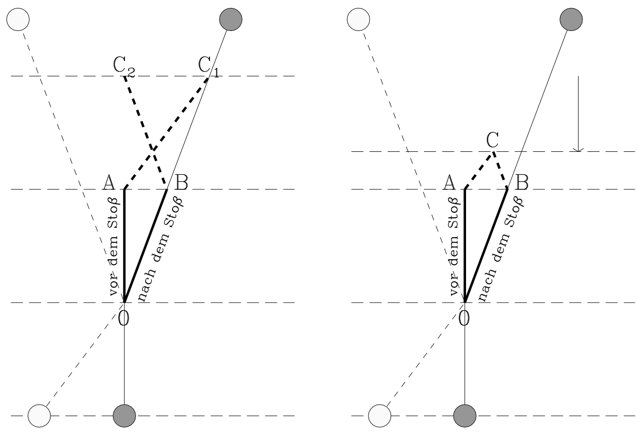

Abbildung 5: Der gerade zentrale Stoß zweier ungleicher Steine. Rechts ist die erforderliche Veränderung der Längenverhältnisse angegeben

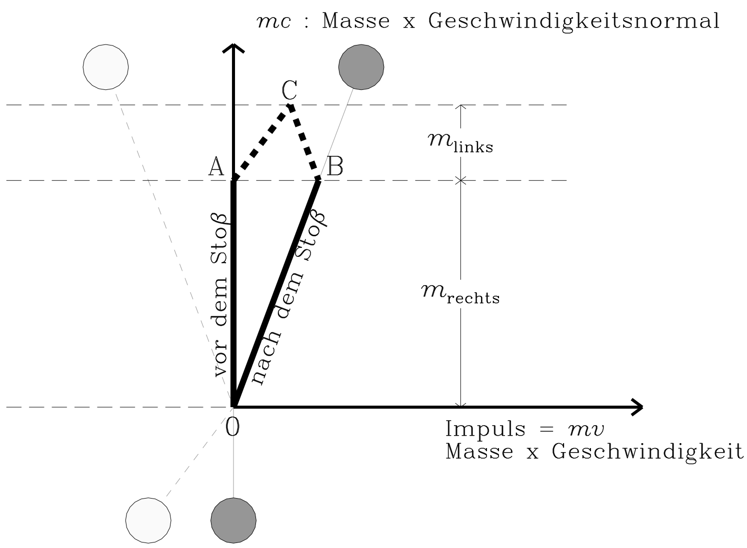

Abbildung 6: Das Impulsviereck. Die Impulse werden parallel zu den entsprechenden Weltlinien gezeichnet. Die Schließbedingung definiert die Massenverhältnisse

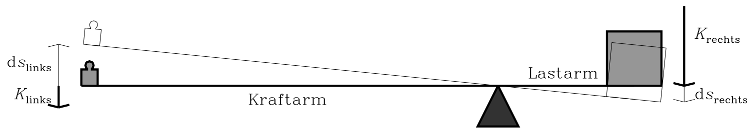

Abbildung 7: Das Hebelgesetz. Der Hebel kann sich um seine Auflage drehen. Er bleibt im Gleichgewicht, wenn bei einer solchen kleinen Veränderung die Summe der Produkte aus Kraft K und Verschiebung $\mathrm{d}s$ in Kraft-Richtung verschwindet. Hier ist das $K_{\text{links}}\mathrm{d}s_{\text{links}} + K_{\text{rechts}}\mathrm{d}s_{\text{rechts}} = 0$. Das linke Produkt ist negativ, weil Kraft und Verschiebung entgegengesetzte Richtung haben. Nun sind die Verschiebungen proportional den Armlängen, und unsere Formel heißt nichts Anderes als *Kraft×Kraftarm=Last×Lastarm* oder *Was man an Kraft spart, muss man an Weg zusetzen*

Kraft und Energie

Wir wissen nun, was mit Masse gemeint ist, und nun müssen wir uns nur noch einfache Stöße ansehen. Wie die Kräfte zustandekommen, die ganze komplizierte Physik der verschiedenen Wechselwirkungen, ist ohne Belang. Wir müssen uns nur versichern, was eine Kraft ist, und was mit Energie gemeint ist. Schließlich wollen wir ja eine Eigenschaft der Energie ableiten. Kraft misst den Einfluss auf ein System von Teilchen, deren Gesamtimpuls ohne diesen Einfluss erhalten bliebe. Wir stellen also fest

Die Änderung des Impulses erfordert eine Kraft. Die Kraft ist gleich der Änderung des Impulses pro Zeiteinheit (Newtons Axiom der Mechanik).

Vom Hebelgesetz wissen wir, dass das Produkt aus Kraft und Weg die entscheidende Größe ist. Greifen mehrere Kräfte an einem Körper an, dann muss ich die Produkte aus den Kräften mit den jeweiligen Verschiebungen in Richtung der Kräfte bestimmen. Der Körper bleibt genau dann im Gleichgewicht, wenn die Summe dieser Produkte verschwindet (Abbildung 7). Ist sie verschieden von Null, setzt sich der Körper in Bewegung.

Das Produkt aus Kraft und Weg (in Richtung der Kraft) ist die dem Körper von der Kraft zugeführte Energie (Hookes Axiom).

Damit haben wir die vier Axiome der Mechanik beisammen, an die wir uns erinnern müssen. Mehr physikalische Kenntnisse brauchen wir nicht. Alles Andere ist Geometrie der Spiegelung.

Masse

Wenn wir einen Stoß aufgezeichnet haben und das Impulsviereck mit Seiten parallel zu den vier Weltlinien zeichnen, um das Massenverhältnis der beiden Steine zu finden, setzen wir stillschweigend voraus, dass Masse beim Stoß nicht übertragen wird und die Massen sich nicht verändern, wenn die Stoßpartner ihre Geschwindigkeiten ändern. Wir wollen aber gerade das untersuchen und müssen uns von dieser Voraussetzung befreien. Das können wir, wenn wir den Zerfall eines Körpers in zwei Fragmente aufzeichnen. Dann wird aus dem Impulsviereck ein Dreieck, das sich analog zum Kräfteparallelogramm zu einem Impulsparallelogramm ergänzen lässt. Wenn ein Körper in zwei Fragmente zerfällt, lassen sich die Massen der Fragmente ohne weitere Voraussetzung aus der Registrierung bestimmen (Abbildung 8).

Nun gehen wir an die Beantwortung der Frage, ob die Masse von der Geschwindigkeit abhängt oder nicht. Dazu betrachten wir den *symmetrischen* Zerfall eines Körpers in zwei gleiche Fragmente. Wenn sich der zerfallende Körper entsprechend bewegt, kann eins der Fragmente einfach liegen bleiben. Das andere eilt davon und wir können die Masse in Ruhe mit der in Bewegung vergleichen. Sind die Fragmente gleich, muss der Zerfall ein symmetrisches Weltlinienbild zeichnen. Was aber ist auf dem Registrierstreifen symmetrisch?

Symmetrie

Solange es um Symmetrie an einer Senkrechten geht, gibt es kein Problem (Abbildung 9), aber Symmetrie an einer geneigten Geraden? Was geschieht, wenn ein Körper im Fluge symmetrisch zerfällt? Die Geschwindigkeiten der Fragmente relativ zum zerfallenden Körper sind gleich gross, haben aber verschiedene Vorzeichen.

Relativgeschwindigkeit berechnen wir als Differenz der Geschwindigkeiten und halten das für selbstverständlich. Wir spiegeln dann ein Ereignis, indem wir horizontal bis zur spiegelnden Geraden ziehen und das dabei abgefahrene Intervall noch einmal anfügen (Abbildung 10). Spiegelbilder eines Ereignisses sind also immer gleichzeitig. Der symmetrische Zerfall zeigt dann, dass die Masse nicht von der Geschwindigkeit abhängt (Galileo-symmetrischer Zerfall). Die drei Feststellungen

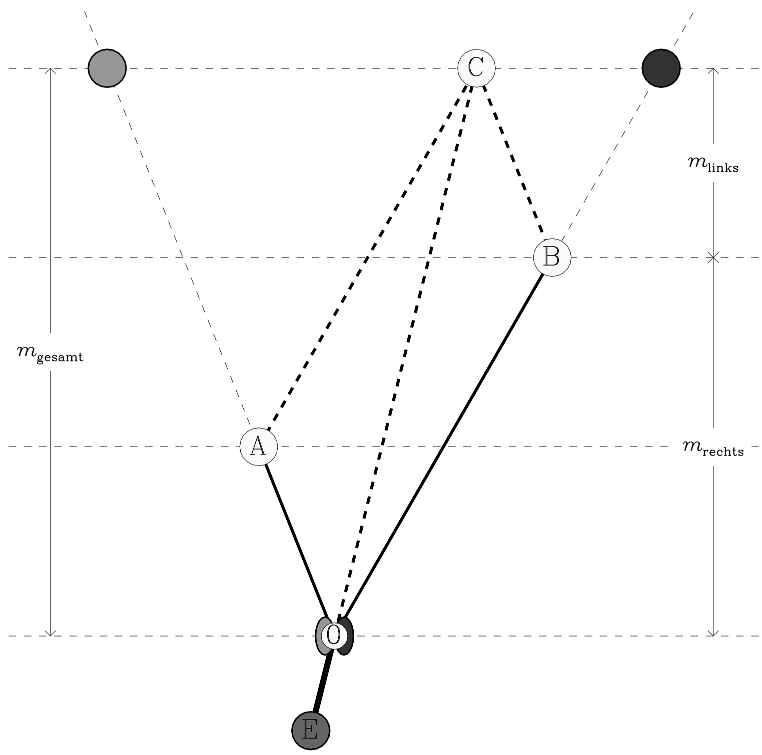

Abbildung 8: Der Zerfall in zwei Fragmente. Vor dem Zerfall muss der Gesamtimpuls als Intervall der einen Weltlinie dargestellt werden (OC). Nach dem Zerfall hat er für jedes Fragment eine Komponente in Richtung deren Weltlinien (OA und OB). Das Dreieck ist bestimmt, und die Verhältnisse der vertikalen (Zeit-)Komponenten sind die Massenverhältnisse

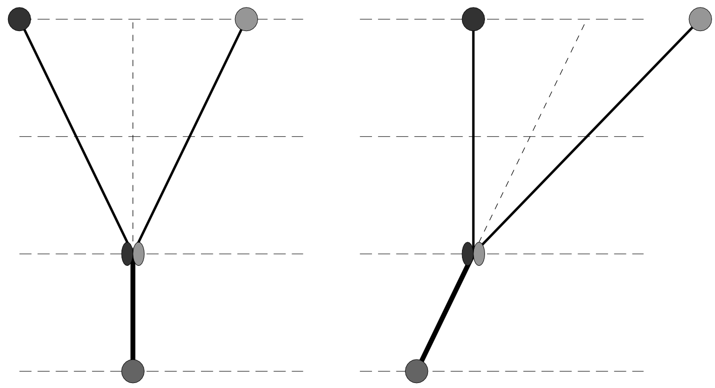

Abbildung 9: Symmetrischer Zerfall, *Links* in Ruhe, *rechts im Fluge*. Wir subtrahieren rechts einfach die Geschwindigkeit des einen Fragments aus dem linken Bild und erhalten so einen Zerfall, bei dem ein Fragment einfach liegen bleibt, während das andere davoneilt.

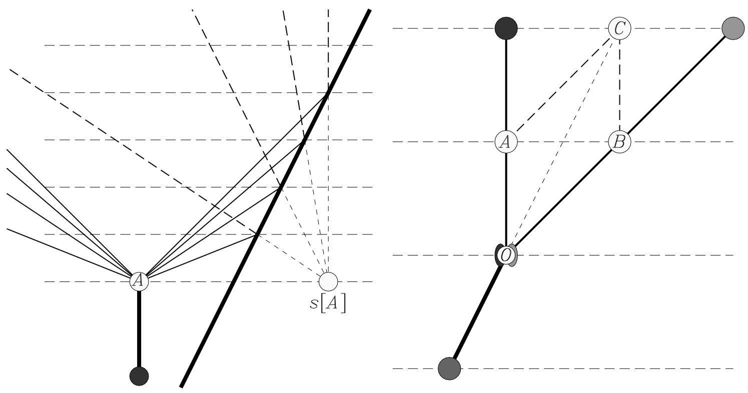

Abbildung 10: Spiegelung bei Addition der Geschwindigkeiten. Spiegelbilder sind gleichzeitig unabhängig von der Bewegung des Spiegels (*links*). Das Impulsparalelogramm zeigt: die Masse ist von der Geschwindigkeit unabhängig (*rechts*)

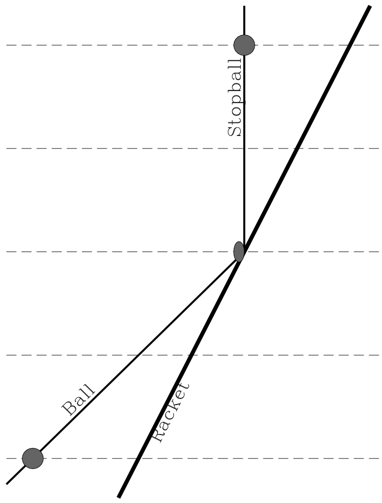

Abbildung 11: Ein Racket bremst den Ball vollständig ab, wenn es halb so schnell wie der Ball ist. Ein Lichtsignal wird nicht auf gleiche Weise gespiegelt. Auf einer Lichtwelle kann man nicht reiten

1. Spiegelbilder eines Ereignisses sind gleichzeitig ('Gleichzeitigkeit ist absolut')
2. Massen sind geschwindigkeitsunabhängig
3. Relativgeschwindigkeit ist die Differenz zweier Geschwindigkeiten ('Addition der Geschwindigkeiten')

sind gleichwertig, aus einer folgen jeweils die beiden anderen.

Was ist nun falsch an diesem Bild? Wir denken uns einen Spiegel, halb so schnell wie das Licht, der von einem Lichsignal eingeholt wird. Das reflektierte Licht müsste dann nach der Spiegelung bewegungslos verharren, wie der Tennisball, der nach einem idealen Stop einfach nach unten fällt (Abbildung 11). Nein, das Licht ist eine Welle und kein Teilchenstrom, und das reflektierte Licht hat die gleiche Geschwindigkeit wie vorher, nur die andere Richtung.

Spiegelung mit dem Licht ist also etwas Anderes. Wir konstruieren sie mit den Registriergeraden von vier Lichtsignalen. Solche Registriergeraden wollen wir Lichtlinien nennen. Jedes Ereignis wird von zwei Lichtsignalen passiert, eins nach rechts und eins nach links, d.h., jedes Ereignis in unserer Orts-Zeit-Ebene ist Schnittpunkt genau zweier Lichtlinien, deren Spiegelbilder sich im Spiegelbild des Ereignisses schneiden müssen. Wir zeichnen ein Viereck, das wir Lichteck nennen (Abbildung 12).

Welche Spiegelung ist nun die richtige? Die des Lichts oder die des Tennisballs? Können beide zusammen existieren? Einstein war überzeugt: es kann nur eine geben. Wir nennen das Relativitätsprinzip. Und richtig muss die des Lichts sein, denn: die Spiegelung des Tennisballs widerspricht der des Lichts bei Tennisballgeschwindigkeiten nicht, wohl aber widerspricht die Spiegelung des Lichts der des Tennisballs bei Lichtgeschwindigkeit. Wir fordern also

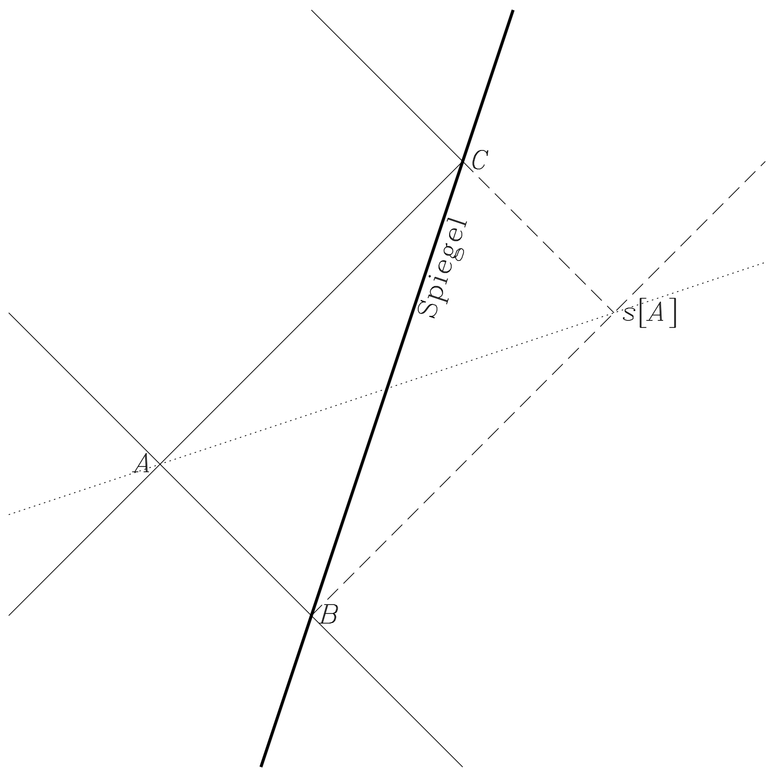

Abbildung 12: Lichteck. Die zwei Lichtsignale durch ein Ereignis und ihre Spiegelungen definieren ein Viereck. Eine Diagonale ist die spiegelnde Gerade, die andere verbindet das Ereignis mit seinem Spiegelbild und steht deshalb 'senkrecht' auf dem Spiegel. Natürlich: Senkrechtstehen und Spiegelung sind nicht die erwarteten euklidischen Prozeduren, wir zeichnen in einer Orts-Zeit-Ebene, nicht in der euklidischen Zeichenebene!

Bei Spiegelungen wird aus einer Lichtlinie wieder eine Lichtlinie. Die gespiegelten Lichtlinien unterscheiden sich nicht von den ungespiegelten.

Die Spiegelbilder einer Lichtlinie hängen nicht davon ab, wie schnell sich der Spiegel bewegt. Mit dieser Forderung kann man auf dem Registriestreifen Senkrechtstehen, Drehungen, Längen und Winkel bestimmen. Das Lichteck, wie wir schon angedeutet haben, bestimmt das Senkrechtstehen in einer ganz neuen Art. Das handelüblichen Lineal oder der Winkelmesser müssen versagen. Was Längen und Winkel auf dem Registrierstreifen bedeuten, muss erst genauer angesehen werden. Das wollen wir hier aber nicht tun, sondern uns gleich unserem Ziel, Einsteins berühmter Formel zuwenden.

$E = mc^2$

Einsteins Relativitätstheorie ist die Ausarbeitung der Forderung, dass sich die Mechanik nach dem Licht richten muss, dass die Spiegelungsvorschrift des Lichts auch für die Mechanik, ja für die ganze Physik gelten muss. Das unerwartete Ergebnis war, dass dies mit sehr einfachen Konstruktionen zu bewerkstelligen ist.

Wir wollen aber nicht die gesamte Physik betrachten, sondern nur den symmetrischen Zerfall, um die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse zu finden. Wir zeichnen wieder die Weltlinie eines Körpers in Bewegung, der in zwei geiche Fragmente zerfällt. Eins soll unbeweglich liegen bleiben, also eine vertikale Weltline zeichnen. Die Weltlinie des zweiten Fragments muss nun das Spiegelbild dieser Linie an der Weltlinie des zerfallenden Körpers sein. Wir konstruieren dieses Spiegelbild mit dem Lichteck (Abbildung 13). Der Gesamtimpuls (längs der Ausgangslinie) muss nun in die Richtungen der Weltlinien der Fragmente zerlegt werden. Also sind die Impulse der Fragmente die Strecken OA und OB. Die Ereignisse A und B liegen spiegelbildlich zu AC. Sie sind – bezogen auf unseren Registrierstreifen – nicht mehr gleichzeitig, obwohl sie bezogen auf die Symmetrieachse natürlich gleichzeitig sind. Gleichzeitigkeit wird ein Urteil, das je nach Bewegung des Richters verschieden ausfallen muss. Dieser Tatbestand heißt Relativität der Gleichzeitigkeit. Er zeigt direkt wie kein anderer das Neue an der Spiegelung und ist der Schlüssel für das Verständnis aller kinematischen Merkwürdigkeiten der Relativitätstheorie.

Wir ergänzen nun das Weltliniennetz zum Impulsparallelogramm des Zerfalls. OA stellt den Impuls des liegenden Fragments dar, OB den des fortschnellenden. Die horizontalen Komponenten sind die Produkte aus Masse und Geschwindigkeit, die vertikalen die Masse selbst, deren Einheit wir noch wählen können. Wir schaffen uns eine bequeme Eselsbrücke, wenn wir die Weltlinien der Lichtsignale den rechten Winkel zwischen Horizontale und Vertikale halbieren lassen (Abbildung 14). Dann wird die Lichtgeschwindigkeit c die Einheit der Geschwindigkeit, und wir können die Geschwindigkeit etwa des forteilenden Fragments durch $v = c\, OE/EB$ bestimmen. Im

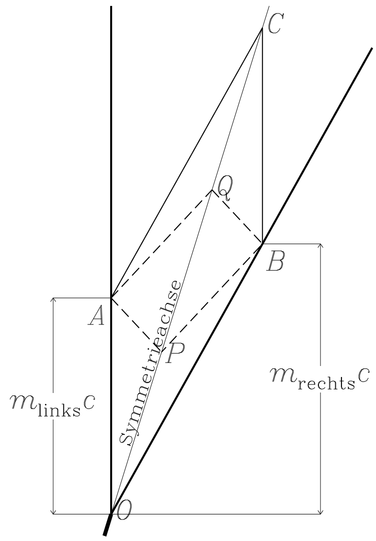

Abbildung 13: Weltlininenbild des symmetrischen Zerfalls mit der neuen Spiegelungsvorschrift. Die Masse in Bewegung (m_{rechts}) ist größer als die in Ruhe (m_{links}). Wieviel größer zeigt die nächste Abbildung

Impulsdiagramm ist OE der Impuls dieses Fragments, und wenn wir $OE = mv$ setzen, ist $EB = mc$. Die Geschwindigkeit des liegenbleibenden Fragments ist null, OA ist vertikal und bestimmt die Masse des Fragments, wenn es sich nicht bewegt. Wir nennen diese Masse Ruhmasse, $OA = m_0c$.

Zuerst betrachten wir das Hilfsliniennetz aus Lichtlinien. Unsere Konstruktion lieferte OB als Spiegelbild von OA und P auf der Diagonalen OQ des Parallelogramms $OJQF$. Deshalb ist $OHAF$ flächengleich zu $OJBG$. Wir untersuchen nun das Quadrat der Strecke OA und finden

$$\begin{aligned}(OA)^2 &= 2\,OHAF = 2\,OJBG = 2\,OIBD \\ &= 2\,(DEB - OEI) = (EB)^2 - (OE)^2 .\end{aligned}$$

Das ist die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit:

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2 \; . \tag{1}$$

Spiegeln wir mit dem Licht, dann ist die Gleichzeitigkeit nicht mehr absolut, die Masse nicht mehr geschwindigkeitsunabhängig, und die Geschwindigkeiten setzen sich nicht mehr additiv zusammen (additive Zusammensetzung führt gerade auf die gewohnte Spiegelung, Abbildung 10). Nun aber zum letzten Schritt, der Gleichheit von Energie und Masse. Sehen wir uns zuerst den Massenzuwachs $\mathrm{d}m$ an, den ein Impulszuwachs $\mathrm{d}p$ verurscht, der von einer Kraft K im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ hervorgerufen wird. Da $p = mv$ ist, lautet Gleichung (1) zunächst $m^2c^2 - p^2 = m_0^2c^2$. Diese Gleichung muss auch für die angewachsene Masse und den angewachsenen Impuls gelten:

$$(m + \mathrm{d}m)^2c^2 - (p + \mathrm{d}p)^2 = m_0c^2 \; .$$

Der binomische Lehrsatz liefert sofort

$$m^2c^2 + 2(m + \mathrm{d}m)c^2\mathrm{d}m - p^2 - (2p + \mathrm{d}p)\mathrm{d}p = m_0c^2 \; .$$

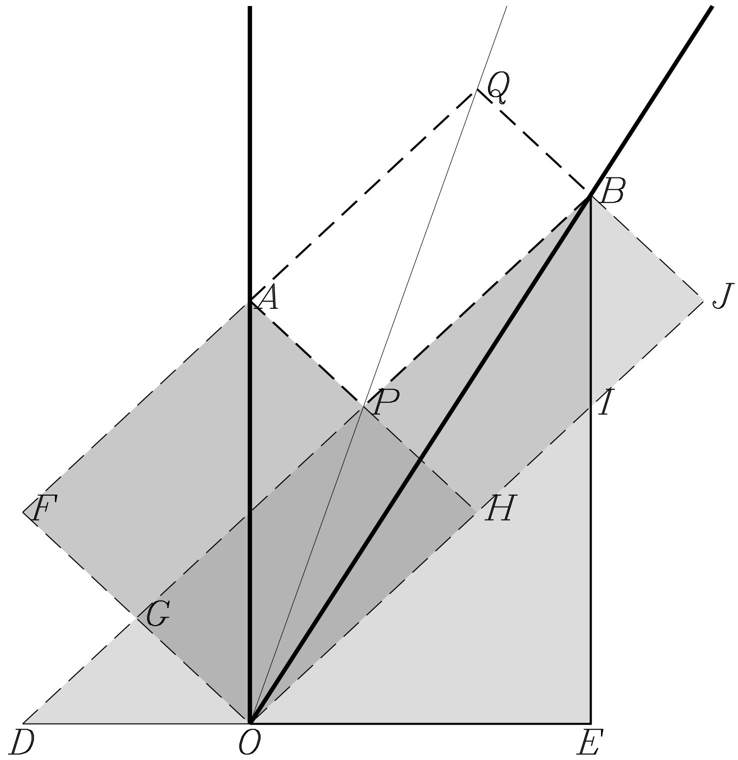

Abbildung 14: Die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit. Ziehen wir das Hilfsnetz aus Lichtlinien, sind die Flächenvergleiche augenfällig. P liegt auf der Diagonalen OQ des Parallelogramms $OJQF$, also ist $OHAF$ flächengleich zu $OJBG$. Da IJB flächengleich zu OGD ist, gilt $OHAF$ = $OIBD$ = DEB - OEI

Wir ziehen die Ausgangsgleichung $m^2c^2 - p^2 = m_0^2c^2$ ab und erhalten

$$(2m + \mathrm{d}m)c^2\mathrm{d}m - (2p + \mathrm{d}p)\mathrm{d}p = 0 \;.$$

Wir lassen die Zuwächse so klein, dass $\mathrm{d}m$ gegen $2m$ und $\mathrm{d}p$ gegen $2p$ nicht ins Gewicht fallen, setzen wieder $p = mv$, kürzen m und schreiben

$$c^2\mathrm{d}m = v\mathrm{d}p \;. \tag{2}$$

Nun benutzen wir die Definition der Energie. Deren Zuwachs hatten wir in der Form $\mathrm{d}E = K\mathrm{d}s$ gefunden. Die Kraft K ist als Impulszuwachs pro Zeit bestimmt, also gilt $\mathrm{d}E = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$. Wir erkennen die Form $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v$ und schreiben schließlich

$$\mathrm{d}E = v\mathrm{d}p \;. \tag{3}$$

Damit sind wir bei Einsteins Schlussfolgerung angelangt.

Jeder Energiezuwachs ist mit einem Massezuwachs verbunden. Die Proportionalitätskonstante ist c^2.

Nun scheint es – wegen der festen Proportionalität – eine einfache Folgerung, alle Energiezuwächse zusammenzunehmen und einfach $E = mc^2$ zu schreiben. Da ist aber die Frage zu klären, ob ein Objekt ohne Energie auch die Masse Null hat, beziehungsweise ob ein Objekt der Masse Null auch keine Energie hat. Diese Frage wird durch die Existenz der Photonen geklärt. Hier haben wir Teilchen, deren Energie $E = h\nu$ und deren Impuls $p = h\nu/c$ ist. Bei Lichtgeschwindigkeit gehört zum Impuls p die Masse $m = p/c$, hier also $m = h\nu/c^2 = E/c^2$. Gibt es erstens eine konstante Bilanz der Massen m (einen Erhaltungssatz der Masse als Zeit-Komponente der Erhaltung des Impulses), gibt es zweitens eine konstante Bilanz (einen Erhaltungssatz) der Energie E und gibt es drittens einen Posten (ein Teilchen), für den immer $E = mc^2$ ist, so muss $E = mc^2$ für alle Posten gelten (Abb. 15). Tatsächlich gibt es Teilchen, die direkt in zwei Photonen zerfallen können, wobei sich die Gesamtenergie in der Gesamtenergie der Photonen und die Gesamtmasse in der Masse der Photonen wiederfindet. Da für die Photonen $E = mc^2$ gilt, muss dies auch für das zerfallene Teilchen gelten (Abbildung 16). Wir finden ohne Weiteres

$$\begin{aligned} m_{\text{gesamt}}c &= m_{\text{links}}c + m_{\text{rechts}}c = p_{\text{links}} + p_{\text{rechts}} \\ &= E_{\text{links}}/c + E_{\text{rechts}}/c = E_{\text{gesamt}}/c. \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie eines Systems ist seiner Gesamtmasse proportional,

$$\boldsymbol{E = mc^2} \;.$$

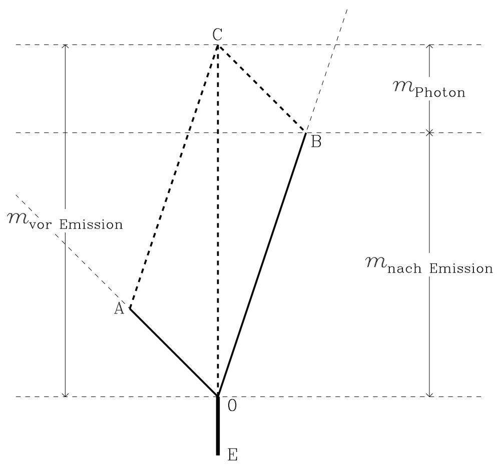

Abbildung 15: Spontane Emission. Die Masse der Quelle ist nach der Emission kleiner als davor, die Ruhmasse um so mehr. Ein Körper im Grundzustand kann nichts emittieren

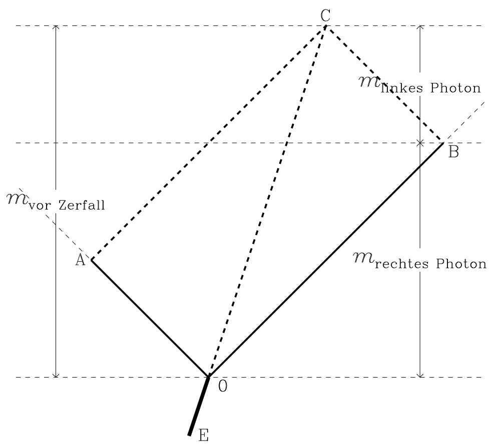

Abbildung 16: Zerstrahlung eines Teilchens im Fluge. Die Summe der Photonenmassen ist proportional der Summe ihrer Impulse und ihrer Energie

Das war's. Wir haben nichts über die Art der Kräfte und die Einzelheiten der Wechselwirkungen wissen müssen und nur die Axiome der Mechanik benutzt, wir haben keine komplizierte (nur eine ungewohnte) Geometrie konstruiert, wir haben nur die Grundrechenarten benutzt, und sind so bis zur berühmtesten Formel der Wissenschaft vorgedrungen. (Das ist ein bisschen hochgestapelt, wenn man an das Rechnen mit kleinen Zuwächsen denkt, das eigentlich erst in der Differentialrechnung einwandfrei begründet wird.) Deshalb ist Einsteins Formel so berühmt, weil sie aus den untersten Grundlagen der Physik abgeleitet wird und deshalb so weit gilt, wie diese Grundlagen Bestand haben.

Sicher gibt es nun eine Reihe Missverständnisse, die davon herrühren, dass man die verwendeten Begriffe nicht gegen die vielen Assoziationen abgrenzt, die die Wörter der Umgangssprache wie ein Halo umgeben. Was bezeichnet man nicht alles als Energie, was nicht alles als Masse! Das häufigste Missverständnis ist die Behauptung, Einsteins Formel würde die Umwandlung von Masse in Energie beschreiben. Das kann aber nicht gehen, dazu müsste die Bilanz

$$E + mc^2 \text{ konstant}$$

lauten, das ist aber nicht der Fall. Energie und Masse bleiben beide *einzeln* erhalten. Nur ein System, das Energie verliert (etwa durch Photonen, die in den Raum entweichen) kann auch Masse verlieren (gerade die Masse, die von den Photonen hinausgetragen wird). Es gibt keine Umwandlung von Masse in Energie und umgekehrt. Wir können jedoch die Ruhmassen der einzelnen Teile zusammenzählen. Deren Summe ist von der Gesamtmasse des Systems verschieden, weil beim Gesamtsystem etwa noch die Massen der kinetischen Energie der Bewegung der Teile im System und der Bewegung der Gesamtsystems dazukommen und die zur Bindungsenergie gehörende Masse abgeht. Die Summe der Ruhmassen ist auch nicht konstant. Das Photon hat, wie man sich mit Gleichung (1) klarmacht, gerade keine Ruhmasse. Ein Teilchen, das in zwei Photonen zerfällt, wandelt seine Ruhmasse in Masse der Photonenbewegung um (Abbildung 16).

Verändern sich die Ruhmassen bei einem Stoß *nicht*, nennen wir den Stoß elastisch. Die Ruhmasse eines Stoßpartners verändert sich bei *unelastischen* Stößen. Nun wissen wir aus der Quantenmechanik, dass der einzelne stabile Körper, in dem alle Teile irgendwie gebunden sind, seine Ruhenergie und damit seine Ruhmasse nur in diskreten Stufen ändern kann. Wenn die kinetischen Energien beim Stoß zu klein sind, kann der Stoß nur elastisch sein. Erst ab einer gewissen Größe kann sich Bewegungsenergie in Ruhenergie umwandeln und also der Bewegung verloren gehen. Beim Franck-Hertz-Versuch wird gerade dieser Sachverhalt nachgewiesen. Hat die Ruhenergie eines Körpers nicht ihren kleinsten Wert, kann der Körper spontan ein Photon abstrahlen (Abbildung 16, links). Die Emission eines Photons erzeugt einen Rückstoß und der Körper verändert seine Bewegungsrichtung. Im Grundzustand kann er kein Photon abstrahlen, weil seine Ruhenergie nicht mehr sinken kann, und seine Bewegung bleibt unverändert. So ist es kein Wunder, dass Galileos Axiom auch tatsächlich befolgt wird.

Gäbe es Teilchen, die schneller sind als das Licht, könnte jeder Körper auch im Grundzustand spontan solche Teilchen abstrahlen und damit seine Bewegung ohne äußeren Anlass verändern. Galileos Axiom würde sich nicht zeigen.

Literatur

[1] Born, M.: *Die Relativitätstheorie Einsteins* 4. Aufl., Spinger, Berlin (1964).

[2] Jaglom,I.M.: *Princip otnositelnosti Galileja i neevklidova geometrija* Izd. Nauka, Moskva (1969).

Yaglom,I.M.: *A simple noneuclidean geometry and its physical basis* Springer Verlag, New York et al. (1979).

[3] Landau,L.D., Rumer,Ju.B.: *Was ist die Relativitätstheorie* Akad.Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig (1962).

[4] Liebscher, D.-E.: *Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene* Teubner, Leipzig (1999).