Geometrie mit der Zeit
und der schnellste Weg zu $E = mc^2$

Dierck-E.Liebscher,
Astrophysikalisches Institut Potsdam,
http://www.aip.de/~lie/, deliebscher@aip.de

Die mechanische Spiegelung definiert die geometrische Spiegelung in der Raum-Zeit-Ebene. Mit einfachen geometrischen Strategien zeigt man die Relativität der Gleichzeitigkeit, die Zeitdilatation, die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse. Der geometrische Zugang ist eine Alternative für die herkömmliche Darstellung, weil er keine formelseitigen Anstrengungen verlangt, direkt an den Geometrieunterricht anschließt und auch die Begründung der Mechanik in einen strengeren Kontext stellt. Darüberhinaus ist der geometrische Zugang zur Stoßmechanik die einzige Möglichkeit, an der Schule weitreichende logische Deduktion in der Physik an einem Beispiel darzustellen.

1 Der Registrierstreifen

Stellen Sie sich vor, Sie sollen die Form einer Schachfigur, sagen wir eines Läufers erklären und nur auf die Form und Größe horizontaler Querschnitte verweisen, ohne die dritte Dimension zu zeichnen. In dieser Situation finden wir uns, wenn wir die Kinematik, speziell die Kinematik der Relativitätstheorie nur an Hand einer Folge von Momentanbildern illustrieren. Das produziert nur Missverständnisse und kann nur Missverständnisse produzieren. Es geht um zeitliche Abläufe, ja der Verlauf der Zeit und der Verlauf in der Zeit sind gerade das Wesentliche. Also muss die Zeit in der Zeichnung erscheinen. Wagen wir also Geometrie mit der Zeit, Geometrie auf dem Registrierstreifen. Lassen wir den Einstein-Zug über die Gardinenstange fahren und sehen wir uns die Spuren an, die er auf dem Rouleau hinterlässt, wenn wir dieses dabei herunterziehen. Es warten fundamentale Erkenntnisse auf uns, die plötzlich anschaulich werden. Eine Zeichnung kann mehr sein als nur eine graphische Darstellung, wenn wir uns wirklich auf Geometrie einlassen.

Wir werden keine besonderen Kräfte betrachten, auch die Schwerkraft nicht, bleiben also im Bereich der sogenannten speziellen Relativitätstheorie. Die Diskussion der Kräfte, der Kraftfelder und ihrer Gesetze ist so einfach nicht mehr, und wir wollen gerade zeigen, wie weit man mit einfachen Mitteln kommt, wenn man diese Diskussion meidet.

Der Registrierstreifen ist das didaktische Konzept, das die statischen Darstellungen ([2, 4, 9], in [5] wird eine Art Registrierstreifen zur Diskussion der Längenkontraktion eingesetzt, aber ganz singulär und konventionell) zur Relativitätstheorie konstruktiv überwindet, die Einführung in die Dynamik auf eine moderne Grundlage stellt und der Elementargeometrie eine vertiefende Anwendung auf nachkonstruierbare Weise zur Verfügung stellt. Die Ableitung der Formel $E = mc^2$ ist gerade in ihrer Kürze geeignet, den inneren Zusammenhang der Mechanik und die Möglichkeit und logische Form von Verständnis darzustellen.

2 Die Axiome der Mechanik

Fangen wir mit dem ersten Newtonschen Axiom an. Im Physiklehrbuch[1] steht:

> Ein Körper bleibt in Ruhe, oder in gleichförmiger Bewegung, solange die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte null ist. Bezugssysteme, in denen dieses Gesetz gilt, werden als Inertialsysteme bezeichnet.

Wenn sich Körper auf der Gardinenstange kräftefrei bewegen und das Rouleau gleichförmig herabgezogen wird, zeichnen die Körper ein Netz von Geraden. Geraden sind aber ohne Bezugssysteme und ohne Kräfte bestimmt als Kurven, die sich höchstens einmal schneiden und die durch jeweils zwei nicht zusammenfallende Punkte bestimmt sind. Wir lernen also: Wenn wir das erste Axiom in der Form

[1] Wir beziehen uns speziell auf das *Lehrbuch Physik für die gymnasiale Oberstufe* des PAETEC Verlags [9], andere Lehrbücher [2, 4, 5] argumentieren ähnlich.

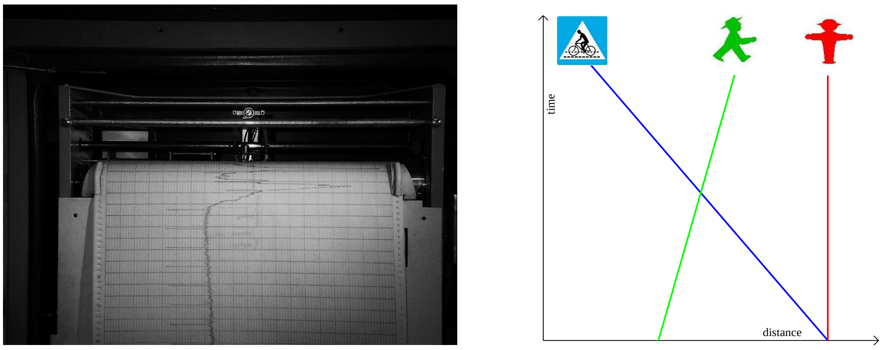

Abbildung 1: Der Registrierstreifen. Ein unbeweglicher Körper zeichnet eine Vertikale. Die Neigung entspricht der Geschwindigkeit

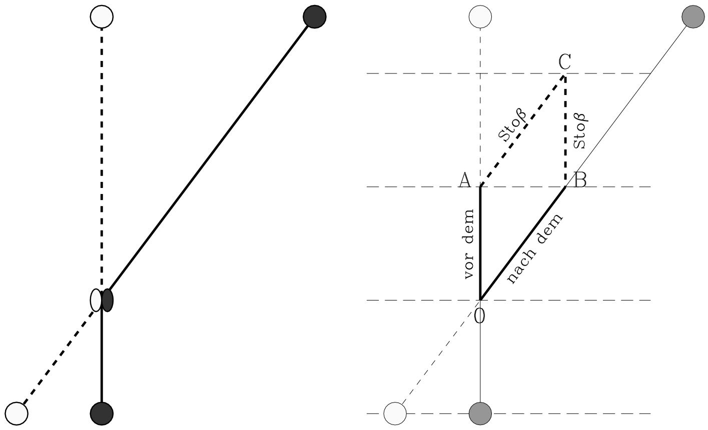

Abbildung 2: Der gerade zentrale Stoß zweier gleicher Steine. Rechts sind die Zeitmarken gezogen und die Geschwindigkeitsbilanz eingezeichnet

Die Weltlinien, die Körper zeichnen, die sich frei von äußeren Einflüssen bewegen, bilden ein Netz von Geraden.

benutzen, werden wir frei von der Notwendigkeit, Kräfte zu definieren oder gar zu addieren, wir benötigen den praktisch sehr komplizierten Begriff des Bezugssystems nicht. Wir haben nun wirklich ein *Axiom* vor uns, zu dessen Formulierung wir nichts weiter voraussetzen müssen[2]. Es ist nun auch ganz unerheblich, ob unser Rouleau wirklich gleichförmig herausgezogen wird, ob es wirklich eben ist usw. Es ist ein nun bereits *ableitbarer* Satz, dass wir Koordinaten einführen können, in denen die Weltlinien durch lineare Beziehungen dargestellt werden. Es ist ein ableitbarer Satz, dass diese linearen Bezugssystemen nicht eindeutig sind, sondern durch lineare Substitutionen in andere ebenfalls lineare Bezugssysteme überführt werden und dass alle diese linearen Bezugssysteme gleichwertig sind. Wir benutzen solche linearen Bezugssysteme im folgenden, wie wir das vom gleichförmig heruntergezogenen ebenen Rouleau auch erwarten (Abbildung 1).

Um die in der Dynamik schwierige Bestimmung der Kraft so weit wie möglich hinauszuzögern und dann auch passend vornehmen zu können, betrachten wir nun elementare Stöße. Zwischen den Stößen bewegen sich die Körper kräftefrei, bei den Stößen ändern sich die Geschwindigkeiten kurzfristig. Der elastische zentrale Stoß ist uns etwa vom Curling geläufig: Der Spielstein übergibt seine Geschwindigkeit dem gestoßenen Stein und bleibt seinerseits liegen (Abbildung 2). Die Summe der Geschwindigkeiten ist vor und nach dem Stoß gleich. Ist jedoch der stoßende Stein vom gestoßenen verschieden, geht diese Gleichheit verloren. Sie wird wiederhergestellt, wenn wir die Geschwindigkeiten je nach Stein wichten (Abbildung 3). Diese Gewicht nennen wir (träge) Masse. Es erweist sich als transitiv[3]. Zunächst setzen wir stillschweigend voraus, dass die Massen vom Bewegungszustand unabhängig sind. Das ist aber nicht selbstverständlich. Deshalb müssen wir auch den Zerfall eines Körpers in zwei Fragmente untersuchen, an deren Weltlinien

[2] In der herkömmlichen Formulierung bedarf der erste Satz des „Axioms“ der vorherigen Bestimmung der Kraft, der zweite scheint die Gültigkeit einzuschränken.

[3] Sind zwei Massen einer dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

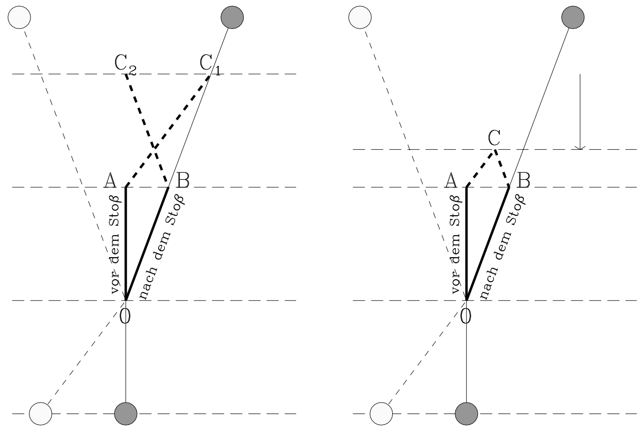

Abbildung 3: Der gerade zentrale Stoß zweier ungleicher Steine. Rechts ist die erforderliche Veränderung der Längenverhältnisse angegeben

wir unmittelbar und eindeutig das Massenverhältnis im jeweiligen Bewegungszustand ablesen können (Abbildung 4).

Wir sehen unmittelbar, dass sowohl die Geschwindigkeit als auch die mit der Masse gewichtete Geschwindigkeit – vorgegeben durch die Weltlinien – nicht nur eine räumliche (hier horizontale), sondern auch eine Zeitkomponente haben (hier vertikal). Die Zerlegung des Gesamtimpulses vor dem Zerfall in die beiden Teilimpulse ist dem Kräfteparpallelogramm analog, spielt sich hier aber auf dem Registrierstreifen ab. Wie die Einheiten zu bestimmen sind, bleibt zunächst noch ganz frei. Wir können sie so wählen, dass die Weltlinien (Registrierkurven) der Lichtsignale eine ins Auge fallende Neigung haben, etwa 45 Grad nach unserer euklidischen Bewertung des Streifens. Das ist eine Eselsbrücke zur Wiedererkennung solcher Weltlinien, keine Notwendigkeit für die geometrischen Schlüsse. Die Figuren können alle mit gleichem Faktor gestreckt werden, ohne dass sich an den Beweisen etwas ändert. Messen wir also die Zeit mit der Distanz, die ein Lichtsignal in dieser zurücklegen kann, erhalten wir nach Wichtung der Geschwindigkeiten ein Impulsdiagramm, das horizontal das herkömmliche Produkt aus Masse und Geschwindigkeit anzeigt, vertikal aber das Produkt aus Masse und Lichtgeschwindigkeit. Die letztere ist vorläufig einfach ein Maßstabsfaktor. Der Erhaltungssatz des Impulses umfasst nun auch den Erhaltungssatz der Masse (d.h. der hier vertikalen Komponente, Abb. 5).

Setzen wir an Stelle der herkömmlichen Formulierung des dritten Axioms (actio = reactio), in der die Bestimmung der Kraft vorausgesetzt wird, Huygens' Satz von der Erhaltung des Impulses, werden wir von der Verpflichtung frei, jetzt schon über den Begriff der Kraft zu diskutieren, und haben dennoch die Masse definiert. Danach erst bestimmen wir die Kraft. Wenn nun ohne äußeren Einfluss der (Gesamt-)*Impuls* erhalten bleibt, muss die Kraft als Änderung des *Impulses* pro Zeiteinheit bestimmt werden. Es kann also keine Diskussion darüber geben, ob es nicht doch Kraft = Masse × Beschleunigung heißen muss. Alles das ergibt sich zwangsläufig, wenn man von vornherein geometrisch argumentiert.

Hängt die Masse von der Geschwindigkeit ab? Dazu betrachten wir einen *symmetrischen* Zerfall, sehen uns das Weltlinienbild an und werten es nach dem Massenverhältnis aus. Ist der zerfallende Körper in Ruhe, muss das Weltlinienbild auch nach herkömmlicher Vorstellung symmetrisch sein (Abb. 6). Die Massen der Fragmente sind gleich, die Geschwindigkeiten der Fragmente (bis auf das Vorzeichen) ja auch. Nun betrachten wir den gleichen Zerfall, wenn sich der zerfallende Körper so bewegt, dass eins der Fragmente am Ort des Zerfalls liegen bleibt. Die Weltlinie des zerfallenden Körpers muss die Symmetrieachse der Figur sein, aber was ist symmetrisch?

3 Symmetrie und Spiegelung

Wir erinnern uns an die mechanische Spiegelung. Ist der gestoßene Stein extrem schwer, wird der Spielstein reflektiert, die Relativgeschwindigkeit zum spiegelnden Körper wechselt das Vorzeichen. Die alltägliche Erfahrung sieht als Relativgeschwindigkeit die Geschwindigkeitsdifferenz an. Damit erhalten wir eine Spiegelung, bei der das gespiegelte Ereignis immer gleichzeitig mit seinem Spiegelbild auftritt (Abb. 7, links). Spiegeln wir also die Weltlinie des ruhenden Fragments nach dieser Vorschrift, erhalten wir gleiche Massen für die beiden Fragmente (Abb. 7, rechts)).

Die drei Aussagen

1. Die Relativgeschwindigkeit kann als Differenz berechnet werden.

2. Die Gleichzeitigkeit des Spiegelbildes ist unabhängig von der Bewegung des Spiegels.

3. Die Massen hängen nicht von der Geschwindigkeit ab.

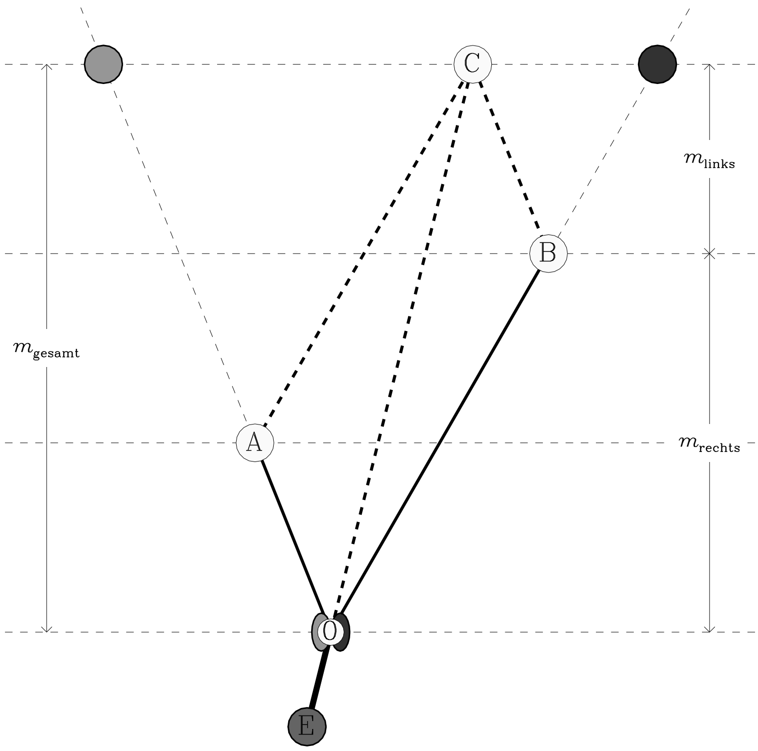

Abbildung 4: Der Zerfall in zwei Fragmente. Vor dem Zerfall muss der Gesamtimpuls als Intervall der einen Weltlinie dargestellt werden (OC). Nach dem Zerfall hat er für jedes Fragment eine Komponente in Richtung deren Weltlinien (OA und OB). Das Dreieck ist bestimmt, und die Verhältnisse der vertikalen (Zeit-)Komponenten sind die Massenverhältnisse

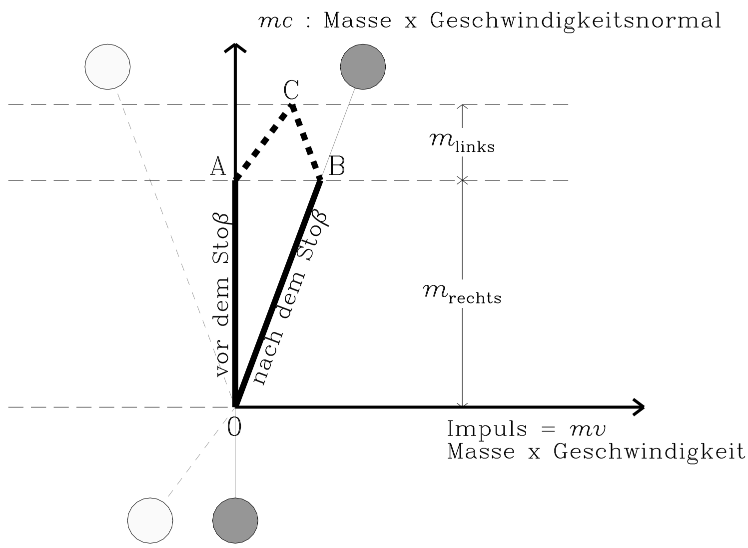

Abbildung 5: Das Impulsviereck. Die Impulse werden parallel zu den entsprechenden Weltlinien gezeichnet. Die Schließbedingung definiert die Massenverhältnisse

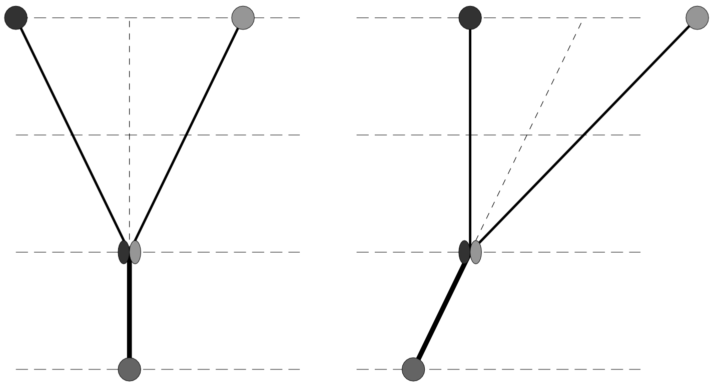

Abbildung 6: Symmetrischer Zerfall, *Links* in Ruhe, *rechts im Fluge.* Wir subtrahieren rechts einfach die Geschwindigkeit des einen Fragments aus dem linken Bild und erhalten so einen Zerfall, bei dem ein Fragment einfach liegen bleibt, während das andere davoneilt.

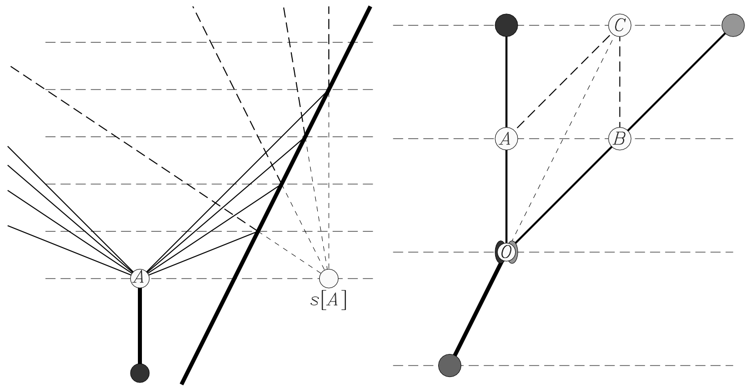

Abbildung 7: Spiegelung bei Addition der Geschwindigkeiten. Spiegelbilder sind gleichzeitig unabhängig von der Bewegung des Spiegels (*links*). Das Impulsparalelogramm zeigt: die Masse ist von der Geschwindigkeit unabhängig (*rechts*)

sind gleichwertig, aus jeweils einer folgen die beiden anderen. Alles scheint unproblematisch zu sein und unser empirisch gestütztes Vorurteil zu bestätigen.

Das Licht spielt jedoch nicht mit. Es setzt sich mit anderen Geschwindigkeiten immer so zusammen, dass wieder eine Geschwindigkeit gleichen Betrages entsteht. Unabhängig von der Bewegung des Spiegels hat das Licht nach der Spiegelung die gleiche Geschwindigkeit wie vorher, nur mit anderem Vorzeichen[4]. Die Regel, dass die Relativgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeitsdifferenz ist, ist bei so hohen Geschwindigkeiten deutlich falsch. Also muss die Zeitfolge zweier spiegelsymmetrischer Ereignisse nun doch von der Bewegung des Spiegels abhängen, und die Massen müssen doch von der Geschwindigkeit abhängen.

Es ist nicht schwierig, das zu sehen, wenn wir wieder zur Geometrie auf unserem Registrierstreifen zurückkehren. Wir konstruieren nun die Spiegelung mit Hilfe der Weltlinien von Lichtsignalen[5], weil wir deren Verhalten bei Spiegelungen kennen und nun einfach voraussetzen (Abb. 8).

4 Senkrechtstehen und Satz des Pythagoras

Wir sehen sofort, dass am bewegten Spiegel nicht mehr gleichzeitig ist, was am ruhenden Spiegel gleichzeitig war (Abb. 9). Zunächst aber wollen wir die Folgen unserer Spiegelung für die Geometrie auf dem Registrierstreifen ansehen. Die erste Folgerung aus der Spiegelung ist die Bestimmung senkrechter Geraden. Wie in der euklidischen Geometrie auch sind die Senkrechten auf einer Geraden diejenigen Geraden, die in sich selbst gespiegelt werden. Die Verbindung zweier spiegelbildlich registrierter Ereignisse ist senkrecht auf der spiegelnden Geraden. Rechte Winkel sehen also etwas anders aus als in der euklidischen Geometrie, und Rechtecke ebenfalls. In der euklidischen Geometrie ist das

[4]Beim Tennis mit Photonen wäre eine sinnlose Mühe, Kraft in den Schlag zu legen. Leider funktioniert solch ein Tennis ohnehin nicht, weil man das Photon nicht kommen sieht.

[5]Wir schreiben immer *Lichtgeschwindigkeit*, meinen aber die Geschwindigkeit, die bei ihren Zusammensetzungen mit anderen Geschwindigkeiten ihren Betrag behält. Das reale Licht könnte auch eine andere, leicht abweichende Geschwindigkeit haben. Im übrigen reicht es aus, dass es irgendeine Geschwindigkeit gibt, bei der das Versagen der Addition bei Zusammensetzungen offenbar wird, um zu *schließen*, dass es eine konstante (absolute) Geschwindigkeit gibt, mit der man rechnen kann.

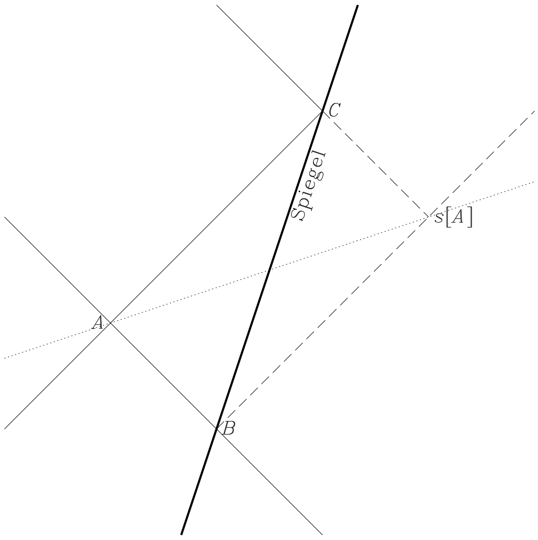

Abbildung 8: Lichteck. Die zwei Lichtsignale durch ein Ereignis und ihre Spiegelungen definieren ein Viereck. Eine Diagonale ist die spiegelnde Gerade, die andere verbindet das Ereignis mit seinem Spiegelbild und steht deshalb 'senkrecht' auf dem Spiegel. Natürlich: Senkrechtstehen und Spiegelung sind nicht die erwarteten euklidischen Prozeduren, wir zeichnen in einer Orts-Zeit-Ebene, nicht in der euklidischen Zeichenebene!

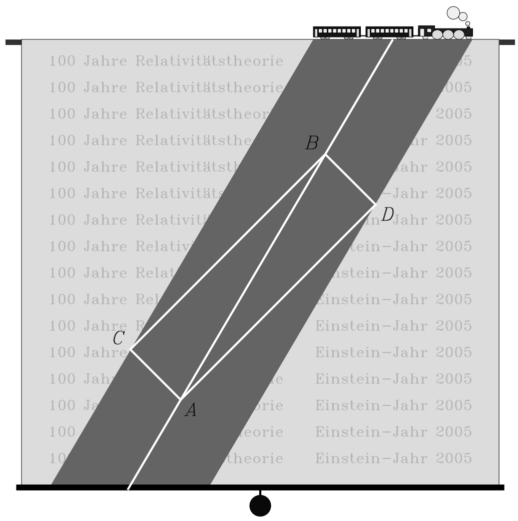

Abbildung 9: Synchronisation im Einsteinzug, klassische Darstellung. Ein Lichtsignal aus der Mitte des Zuges synchronisiert die Uhren an seinen beiden Enden. Die dadurch erhaltenen, im Zug gleichzeitigen Ereignisse sind auf dem Registrierstreifen nicht mehr gleichzeitig. Die Ereignisse sind aber spiegelsymmetrisch zur Weltlinie der Zugmitte.

Quadrat ein besonderes Rechteck, nämlich gerade das, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen[6]. Daraus ergibt sich dann der Satz des Pythagoras mit der bekannten euklidischen Beweisstrategie: Die Summe der Flächen der Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Quadrats über der Hypotenuse (Abb. 10, linke Spalte). Mit dem Senkrechtstehen auf dem Registrierstreifen gibt es allerdings kein Quadrat mehr, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Es gibt dafür aber Rechtecke, deren Diagonalen auf sich selbst senkrecht stehen[7], und wir nehmen sie als Quadrate (Abb. 10, rechte Spalte). Diesmal ergibt die Konstruktion des Pythagoras (wieder mit der euklikdischen Beweisstrategie):

Die *Differenz* der Flächen der Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Quadrats über der Hypotenuse.

Das ist ein weitreichender Satz, der den Registrierstreifen als *pseudoeuklidische* Ebene charakterisiert. Zunächst einmal sind alle Projektionen nicht mehr kürzer, sondern länger als das projizierte Intervall. Das nennen wir Zeitdila-

[6] Solange nicht bestimmt ist, wie Längen auf Geraden verschiedener Richtung zu vergleichen sind, ist die Forderung *Rechteck mit vier gleichen Seiten* unbestimmt und ungeeignet.

[7] Solche Geraden gibt es nun tatsächlich. Es sind die Lichtlinien selbst. Man kann das einsehen, wenn man die Neigung der spiegelnden Geraden bis zu der Neigung einer Lichtlinie vergrößert.

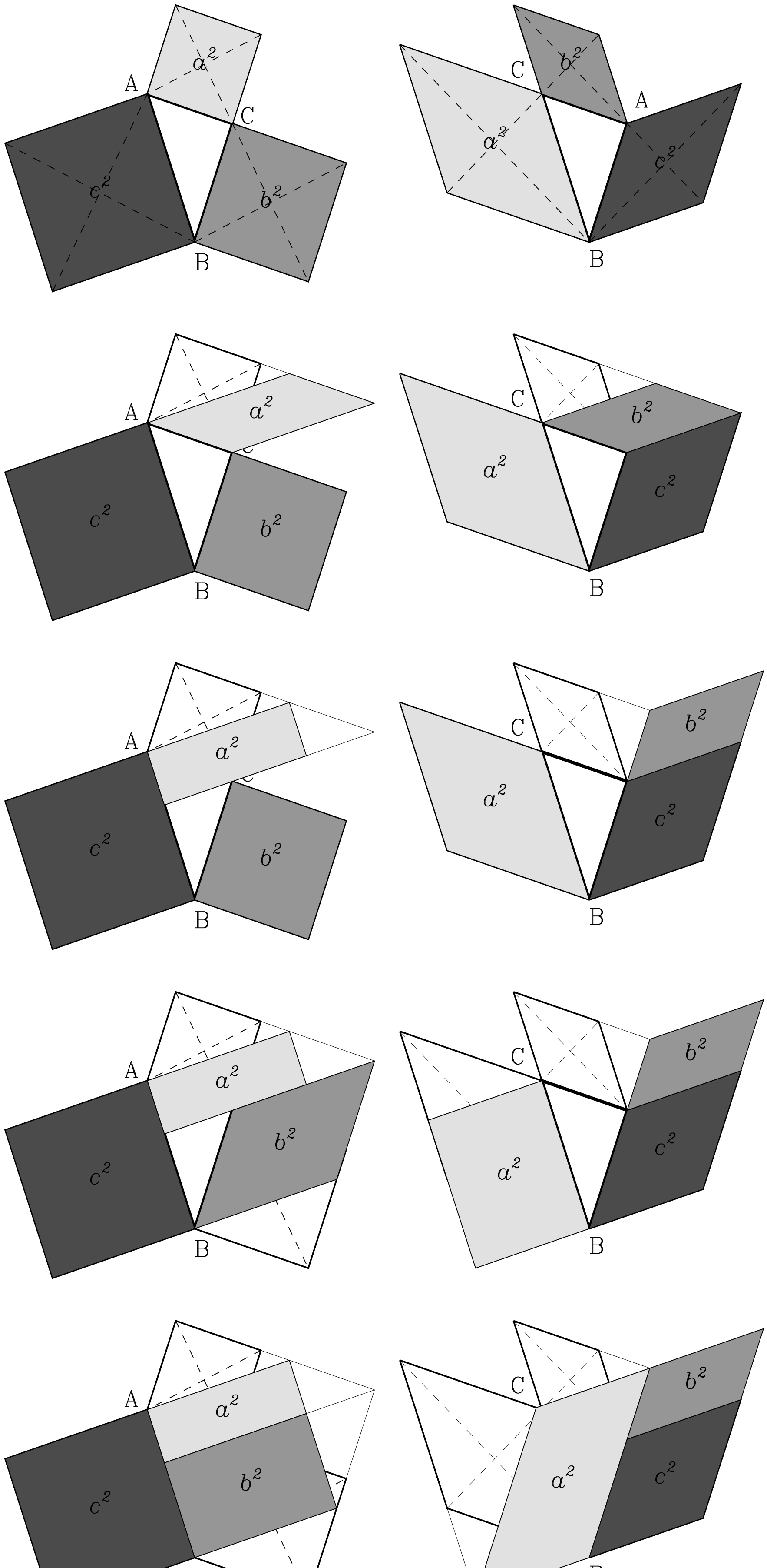

Abbildung 10: Pythagoras nach Euklid und auf dem Registrierstreifen

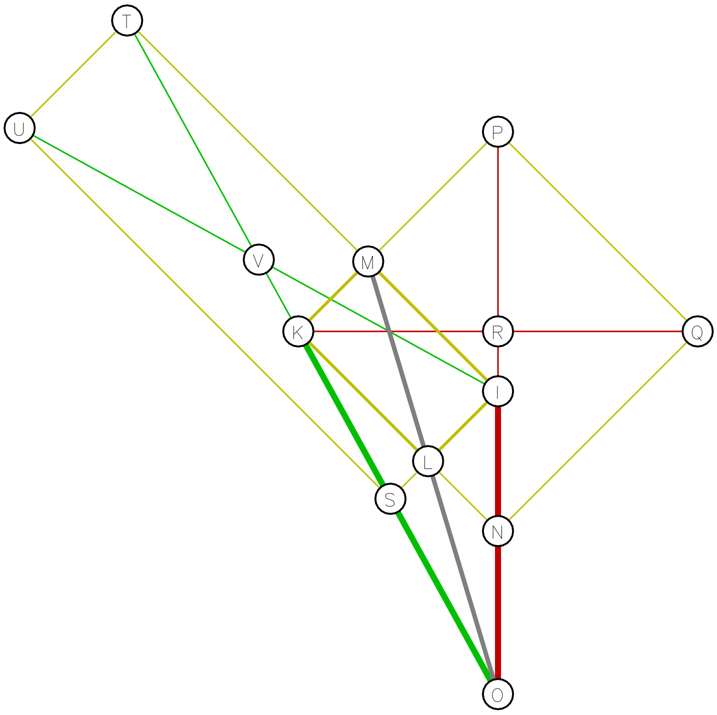

Abbildung 11: Projektionen sind länger als die projizierten Intervalle. An der Geraden OM werden OI und OK ineinander gespiegelt. Die beiden Intervalle sind gleich lang. Mit dem Lichteck $KNQP$ fällen wir das Lot aus K auf OP, der Fußpunkt ist R. Mit dem Lichteck $ITUS$ fällen wir das Lot aus I auf OT, der Fußpunkt ist V. Die Projektion OV ist länger als $OK = OI$, ebenso wie OR länger als $OK = OI$ ist.

tation. Die Projektion eines Intervalls auf eine nicht parallele Linie ist *länger* als das projizierte Intervall (Abb. 11). Eigentlich ist an der Zeitdilatiation die scheinbare Änderung der Zeitlaufs nicht verwunderlich, denn wir kennen die projektionsabhängige Veränderung einer Länge bereits aus der euklidischen Geometrie[8]. Wie die Projektion in der euklidischen Geometrie ist diese Zeitdilatation symmetrisch. Die Projektionen gleicher Weltlinienintervalle aufeinander sind wechselseitig *länger* als die Ausgangsintervalle[9]. Dies ist der Kern des Zwillingsparadoxons. Wenn man das Zwillingsparadoxon formuliert, versucht man, die Auswirkung der Relativität der Gleichzeitigkeit zu verstecken und so zu paradoxen Folgerungen aus einer scheinbaren Symmetrie zu kommen. Es ist aber nichts paradox, die beiden Wege sind nicht wechselseitig aufeinander projizierbar. Es geht um den Vergleich der Dauer einer Reise mit der Dauer des Wartens auf die Rückkunft des Reisenden. Projiiziert man die Reise auf die Weltlinien des Wartenden, muss die Projektion der Reise länger als die Reise selbst sein, obwohl und *weil* alle Uhren des Reisenden inclusive seiner biologischen Uhren ihren Gang *nicht* verändern. Die Dauer der Reise ist also kürzer als die Wartezeit (Abb. 12). Speziell das Licht spürt keine Zeit auf seinem Weg, es altert nicht (Photonen können nicht zerfallen).

5 Masse und Energie

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse ergibt sich nun aus dem symmetrischen Zerfall im Fluge einfach durch den Flächenvergleich an dem Impulsparallelogramm, das durch die spiegelsymmetrische Lage der Weltlinien der Fragmente erzwungen wird (Abb. 13 und 14). Da ist sie, die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse.

$$(m_0 c)^2 = (m[v]c)^2 - p^2 \ .$$

Jetzt erst müssen wir fünf Zeilen rechnen. Wir beginnen damit, uns einen kleinen Zuwachs anzusehen. Impuls und Masse verändern sich um $\mathrm{d}p$ und $\mathrm{d}m$, aber es gilt naürlich weiterhin

$$(m_0 c)^2 = (m + \mathrm{d}m)^2 c^2 - (p + \mathrm{d}p)^2 \ .$$

Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir nach Abzug der ersten Gleichung

$$(2mc^2 + \mathrm{d}mc^2)\ \mathrm{d}m = (2p + \mathrm{d}p)\ \mathrm{d}p \ .$$

[8]An der Weitsprunganlage wird nicht die Weite des Sprunges, sondern nur deren Projektion auf die Längsrichtung gemessen, die immer kürzer als die wahre Weite ist, wenn der Sprung ein wenig zur Seite geht.

[9]In der euklidischen Geometrie sind die Projektionen wechselseitig *kürzer* als die projizierten Intervalle.

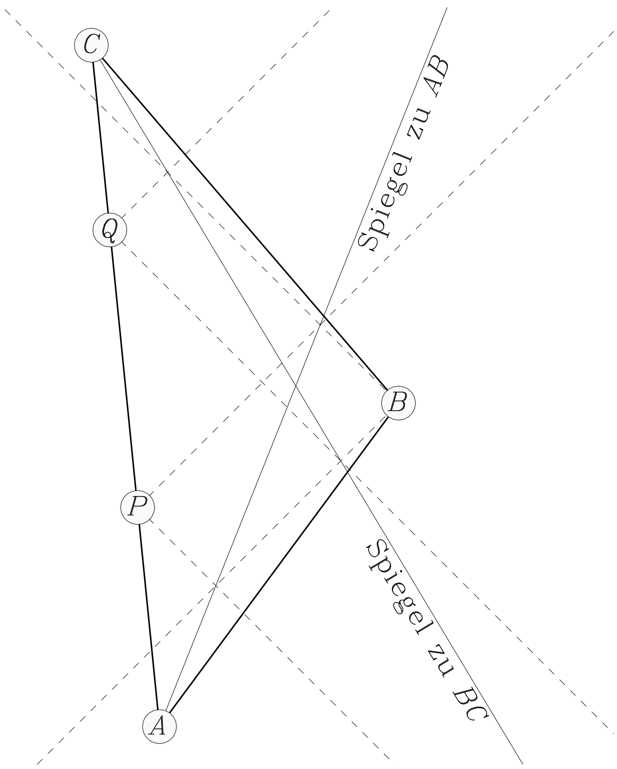

Abbildung 12: Weltlinienplan eines Sternenflugs. Beim Ereignis A trennt sich der Reisende vom Startplatz, der die direkte Spur AC zieht. Der Reisende zieht die Spur ABC. AB ist spiegelbildlich zu AP (also gleich lang), BC ist spiegelbildlich zu QC. Nach Länge ist also $ABC = AP + QC < AC$. Die jeweils spiegelnden Geraden sind die Winkelhalbierenden, ihr Schnittpunkt der Inkreismittelpunkt. Dieser hat hier die Form einer gleichseitigen Hyperbel [7]

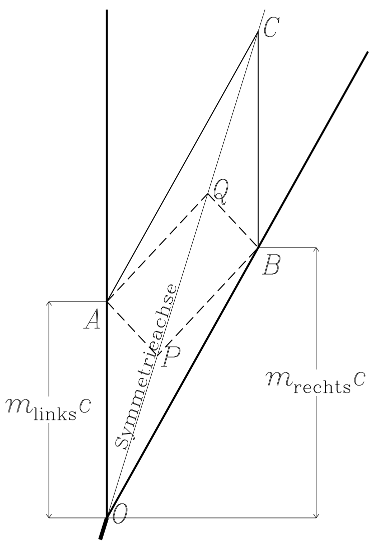

Abbildung 13: Weltlinienbild des symmetrischen Zerfalls mit der neuen Spiegelungsvorschrift.
Die Masse in Bewegung (m_{rechts}) ist größer als die in Ruhe (m_{links}). Wieviel größer zeigt die nächste Abbildung

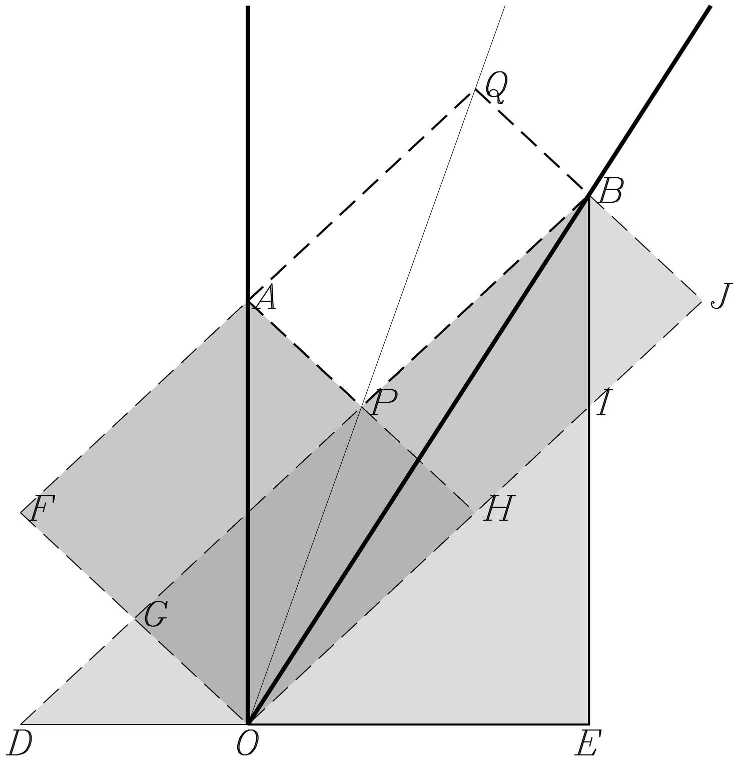

Abbildung 14: Die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit. Ziehen wir das Hilfsnetz aus Lichtlinien, sind die Flächenvergleiche augenfällig. P liegt auf der Diagonalen OQ des Parallelogramms $OJQF$, also ist $OHAF$ flächengleich zu $OJBG$. Da IJB flächengleich zu OGD ist, gilt $OHAF = OIBD = DEB$ - OEI

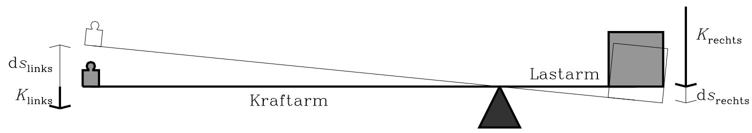

Abbildung 15: Das Hebelgesetz. Der Hebel kann sich um seine Auflage drehen. Er bleibt im Gleichgewicht, wenn bei einer solchen kleinen Veränderung die Summe der Produkte aus Kraft K und Verschiebung ds in Kraft-Richtung verschwindet. Hier ist das $K_{\mathrm{links}}\mathrm{d}s_{\mathrm{links}}+K_{\mathrm{rechts}}\mathrm{d}s_{\mathrm{rechts}} = 0$. Das linke Produkt ist negativ, weil Kraft und Verschiebung entgegengesetzte Richtung haben. Nun sind die Verschiebungen proportional den Armlängen, und unsere Formel heißt nichts Anderes als *Kraft×Kraftarm=Last×Lastarm* oder *Was man an Kraft spart, muss man an Weg zusetzen*

Sind die Zuwächse so klein, dass wir sie gegen m bzw p vernachlässigen können, ist

$$c^2 \; \mathrm{d}m = v \; \mathrm{d}p \; .$$

Es bleibt zu zeigen, dass $v\mathrm{d}p = \mathrm{d}E$ der Zuwachs der Energie ist. Auch die Energie muss elementar begründet und definiert werden. Dazu sehen wir uns das Hebelgesetz an. Wir kennen es in der Form *Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm*. Zum Zwecke der allgemeineren Form ersetzen wir die Armlänge durch die Bewegungen, die die Ansatzpunkte der Kräfte in gegenseitiger Abhängigkeit vollführen können. Die sind am Hebel proportional diesen Armen, verraten aber gleichzeitig, dass sie immer entgegengesetzte Vorzeichen haben und die Gleichgewichtsbedingung also wieder eine Bilanz ist (Abbildung 15):

Die Summe (über alle Kräfte) des Produkts *Kraft mal Weg ihres Ansatzpunktes* ist Null.

Änderungen am System werden also durch ein Produkt aus Kraft und Weg angezeigt, das wir Arbeit nennen, die

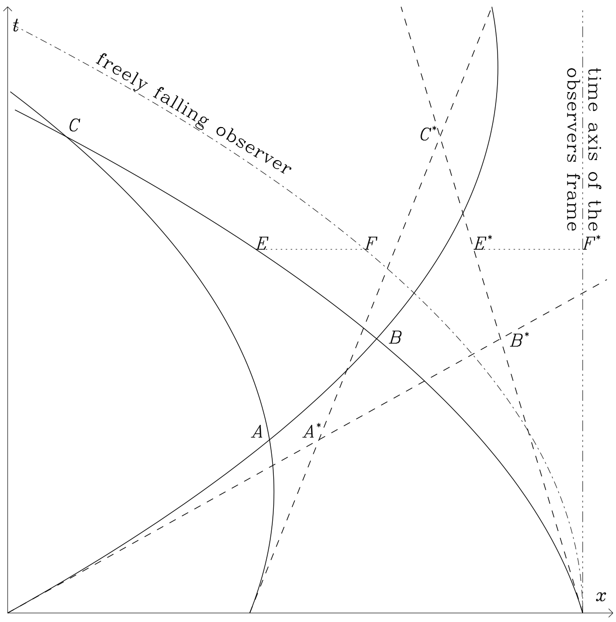

Abbildung 16: Wurfparabeln $h[t]$ bilden eine Geradenschar, die augenfällig wird, wenn die Positionen relativ zu einer bestimmten Parabel registriert wird.

die Energie des Systems erhöht (wenn die Arbeit positiv ist). Wir schreiben also

$$\mathrm{d}E = K\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = \mathrm{d}p\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\mathrm{d}p \ .$$

Erinnern wir uns an die Masse, haben wir

$$\mathrm{d}E = c^2\mathrm{d}m$$

Die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit übersetzt sich in die Abhängigkeit der Masse eines Körpers von seinem Energieinhalt.

Diese Ableitung betrifft zunächst nur den Zuwachs an Masse mit dem Zuwachs an kinetischer Energie. Da sich aber kinetische Energie auch in innere Energie verwandeln kann (etwa beim unelastischen Stoß), und auch bei diesem Energie und Masse erhalten bleiben, muss auch die innere kinetische Energie (thermische Energie) eines Systems einem entsprechenden Teil seiner Masse proportional sein. Es gibt Teilchen (die Photonen), deren Energie aus anderen Gründen der Massen proportional ist. $E = cp$ folgt aus der klassischen Elektrodynamik. In allen Prozessen, an denen Photonen teilnehmen, erzwingen sie den generellen Wechselkurs zwischen Energie und Masse (Abb. 16). Allerdings geht es nicht um Austauschbarkeit von Masse und Energie in dem Sinne, dass ich entweder die eine oder die andere haben kann, sondern Masse ist eine Eigenschaft der Energie, soviel Energie irgendwo ist, soviel Masse ist ebenfalls da.

6 Schwerelosigkeit

Soweit der geometrische Exkurs in die Relativitätstheorie. Es gibt noch einen Punkt zu ergänzen. Wir haben am Anfang darauf bestanden, Geraden durch ihre Relation zu den Punkten zu definieren und die Frage der analytischen Darstellung auszublenden. Das führt uns unmittelbar auf die Bewegung in einem homogenen Gravitationsfeld. Unabhängig von ihrer Konstitution erfahren alle Körper die gleiche Beschleunigung. Das Weltlinienbild zeigt eine Schar einheitlich orientierter und gleich geöffneter Parabeln (Abb. 16). Nach unserer Definition bildet diese Parabelschar ein Netz gerader Linien: Zwei Parabeln dieser Schar schneiden sich höchstens einmal, und zwei Punkte liegen auf höchstens einer gemeinsamen Parabel. Und tatsächlich entsteht mit geeigneten Koordinaten ein Bild linearer Abhängigkeiten. Diese Koordinaten sind die eines frei fallenden Bezugssystems, des berühmten Einsteinschen Fahrstuhls. Das Beschleunigungsfeld verschwindet in einer antriebsfreien Raumstation (Abb. 17). Diese Erkenntnis, eingepasst an inhomogene Beschleunigungsfelder, ist einer der Bausteine der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Abbildung 17: Edward M. Fincke schwerelos in der Raumstation ISS (Quelle: NASA spaceflight.nasa.gov/gallery/)

Literatur

[1] Bachmann,F.: Der Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer, Heibelberg (1959).

[2] Bayer, R.: Impulse, Physik 2, Ernst Klett Verlag, Stuttgart (1997).

[3] Born, M.: Die Relativitätstheorie Einsteins, 4. Aufl., Spinger, Berlin (1964).

[4] Bader,F. Oberholz,H.-W.: Dorn-Bader Physik Sek II, Schroedel Schulbuchverlag, Hannover (2004).

[5] Grehn.J. (Hg.): Metzler Physik, Schroedel Schulbuchverlag, Hannover (1992).

[6] Landau, L.D:, Rumer, Ju.B.: Die Relativitätstheorie Einsteins, Teubner, Leipzig (1964).

[7] Liebscher, D.-E.: Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene, Teubner, Leipzig (1999).

[8] Liebscher, D.-E.: Der kürzeste Weg zu $E = mc^2$ *Physik in der Schule* **43** (2005), .

[9] Meyer,L., Schmidt,G.-D. (Hg.): Physik. Lehrbuch für die gymnasiale Oberstufe, PAETEC, Berlin (2003).