

## Kapitel 5

# Die Relativitätstheorie und ihre Paradoxa

### 5.1 Pseudoeuklidische Geometrie

Die Einsteins Relativitätstheorie von 1905 [35, 39, 83] läßt sich in einem Satz zusammenfassen:

**Die Mechanik hat sich nach der Wellenausbreitung zu richten.**

Tatsächlich hat sich *alle* Physik danach zu richten, und nur die Gravitation bedarf weiterer Präzisierung. Um 1900 war aber das Verhältnis von Elektrodynamik und Mechanik von besonderem Interesse. Die Elektrodynamik paßte von vornherein in den von der Lichtausbreitung gegebenen Rahmen, schließlich ist sie ja die Theorie im Hintergrund der Lichtausbreitung. Sie hatte bereits den formalen Aspekt der neuen Transformationsgruppe von Inertialsystemen geliefert<sup>1</sup>. Die Lichtausbreitung definiert nun Kinematik und Geometrie<sup>2</sup>. Die Relativität in der Mechanik hat dieser Geometrie zu entsprechen. Auch hier werden wir die Mechanik nur so weit wie in den vorangegangenen Kapiteln besprechen, d.h., wir werden uns den Impulserhaltungssatz und die träge Masse ansehen. Wir beginnen damit, die Relativität der Gleichzeitigkeit zu erklären und die elementaren Konstruktionen zusammenzufassen. Dann sehen wir uns das Analogon des Satzes des Pythagoras an, das den Abstand zwischen zwei Ereignissen festlegt. Der nächste Schritt ist die Bestimmung der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse. Sie ist das zentrale Argument. Wir fügen

---

<sup>1</sup>Einsteins erste Arbeit behandelte die Kinematik und die Elektrodynamik. Die Mechanik wurde erst in den folgenden Arbeiten ausgeführt. Planck argumentierte mit diesen Arbeiten für Einsteins Zuwahl in die Preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin.

<sup>2</sup>Betrachten wir die universelle Isotropie der Lichtausbreitung als Konvention, vereinbaren wir damit auch die Geometrie als eine Konvention, die sowohl mit unserem Vorurteil über die Lichtausbreitung korrespondiert als auch mit der Erfahrung, die wir als übereinstimmend mit unseren Vorurteilen empfinden [2]. Das kann man aber so einfach nicht sehen, wie in Kapitel 10 noch einmal dargestellt wird.

die Diskussion der sogenannten Zeitdilatation und der Längenkontraktion an und schließen mit einigen Bemerkungen zur Überlichtgeschwindigkeit.

Die neue Geometrie ist durch die Eigenschaften der Lichtausbreitung definiert. Der grundlegende Unterschied zur Galilei-Geometrie der Raum-Zeit ist schon in Abbildung 4.1 zu erkennen: Die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse  $B$  und  $C$  hängt von der Bewegung des Spiegels ab, nur bei einer bestimmten Geschwindigkeit des Spiegels wird  $C$  Spiegelbild von  $B$  und damit als gleichzeitig zu  $B$  beurteilt. Wir nennen das *Relativität der Gleichzeitigkeit* zur Abgrenzung gegen die *absolute Gleichzeitigkeit*, die wir unter den Voraussetzungen der Galilei-Newtonschen Mechanik gefunden haben. Wir haben schon gesehen, daß die absolute Gleichzeitigkeit der Galilei-Geometrie unmittelbar mit der Geschwindigkeitsunabhängigkeit der Masse und mit der additiven Zusammensetzung der Geschwindigkeiten zusammenhängt. Nun können sich also die Geschwindigkeiten nicht mehr additiv zusammensetzen, und die Massen werden von der Geschwindigkeit abhängen. Das Erste kann uns nicht erstaunen, denn es war unsere Voraussetzung: Die Zusammensetzung der Lichtgeschwindigkeit mit irgendeiner anderen Geschwindigkeit ergibt immer wieder nur die Lichtgeschwindigkeit<sup>3</sup>. Das Zweite werden wir noch einmal illustrieren, wenn wir etwas mehr von der neuen Geometrie der Welt dargestellt haben.

Sehen wir uns also nun die Geometrie an, deren Spiegelungsvorschrift sich an Abbildung 4.1 orientiert. Sie heißt *Minkowski-Geometrie*. Im Fahrplan ist die Neigung der Weltlinien von Lichtsignalen unveränderlich. Die Kegel, die von den Lichtsignalen eines festen Ereignisses erzeugt werden, heißen *Lichtkegel*. Jedes Ereignis trägt einen Lichtkegel. Wir nennen die Linien mit der charakteristischen Neigung der Weltlinien von Lichtsignalen *lichtartige* Linien. Eine lichtartige Weltlinie wird immer wieder in eine solche Weltlinie gespiegelt. Das nutzen wir zur Konstruktion der allgemeinen Spiegelung (Abb. 5.1). Dabei ist die zentrale Figur der Konstruktion das *Lichteck*. Es ist ein Parallelogramm aus lichtartigen Weltlinien. Seine Diagonalen sind – nach Bewertung durch die neue Geometrie – nun lotrecht aufeinander. Sie teilen das Lichteck in vier Dreiecke, von denen sich die jeweils gegenüberliegenden durch Parallelverschiebung zu einem Quadrat ergänzen. Zu jeder Diagonalen liegen die beiden nicht berührten Punkte spiegelsymmetrisch zueinander<sup>4</sup>. Auch der *euklidisch bemessene* Flächeninhalt einer Figur wird bei der Spiegelung nicht verändert.

<sup>3</sup>Dies gilt im Rahmen der Meßgenauigkeit. Genauer, die Lichtgeschwindigkeit müsste nicht unbedingt mit der absoluten Geschwindigkeit identisch sein. Die Gesetze der Lichtausbreitung decken auf, daß es eine absolute Geschwindigkeit gibt, ob das nun die Geschwindigkeit realer Dinge ist oder nicht. Wir folgen aber dem allgemeinen und wohlbegründeten Brauch, Lichtgeschwindigkeit und absolute Geschwindigkeit synonym zu behandeln.

<sup>4</sup>Wenn wir wie hier die lichtartigen Richtungen so in der Zeichenebene wählen, daß sie nach (hilfsweise) euklidischer Beurteilung senkrecht aufeinander stehen, dann ist das Lichteck nach euklidischer Beurteilung ein Rechteck. Zwei Geraden stehen dann in der neuen Geometrie senkrecht aufeinander, wenn der von ihnen gebildete Winkel von den lichtartigen Richtungen nach euklidischer Beurteilung halbiert wird. Diese Betrachtungsweise kann ganz nützlich für die schnelle Zeichnung sein, ist aber bei der Benutzung allein der Konstruktionsmittel der gefundenen Geometrie nicht begründet. Die beiden lichtartigen Geradenbüschel können irgendwie liegen. Wichtig für die Geometrie und ihre Konstruktionen ist *allein* ihre Existenz.

Wir zeichnen das Lichteck  $AA_2S[A]A_1$  und finden die Lotrechte  $AS[A]$  senkrecht  $g$ . Wir erwarten nun für den Längenvergleich  $d[O, A] = d[O, S[A]]$  und für den Winkelvergleich  $\angle OAA_2 = \angle A_2OS[A]$ . Die Verbindung  $AS[A]$  ist das Lot auf der Verbindung  $g$  der Punkte  $A_1$  und  $A_2$ . Das ist identisch mit unserer Schllußfolgerung in Abb. 4.8. Wie wir noch sehen werden, kann man diese Konstruktion als analog zu Abb. 3.4 sehen, weil in der nun entstehenden Geometrie alle Strecken des Lichtecks  $AA_1S[A]A_2$  die Länge Null haben. Die Diagonalen eines Lichtecks stehen aufeinander senkrecht. Umgekehrt gilt auch: Stehen zwei Geraden aufeinander senkrecht, sind sie die Diagonalen eines Lichtecks.

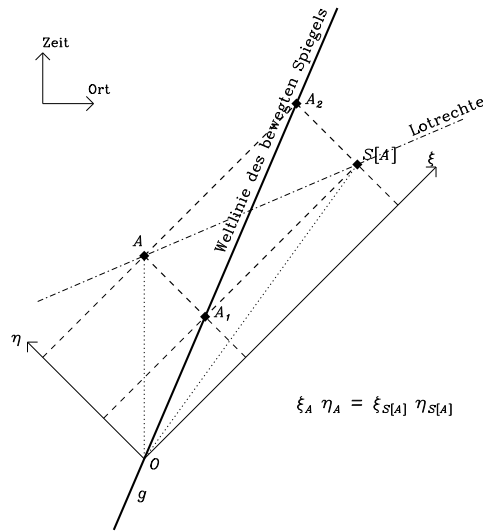


Abbildung 5.1: Spiegelung in der Ort-Zeit-Ebene (Minkowski-Geometrie)

Wir können also *euklidische* Sätze über den Flächeninhalt benutzen.

Die Geraden werden durch die Spiegelungsvorschrift in *zeitartige*, *raumartige* und *lichtartige* Geraden geschieden. Zwei Ereignisse liegen zeitartig zueinander, wenn die Verbindungsgerade innerhalb der von den Ereignissen getragenen Lichtkegel verläuft. Die Verbindungsgerade heißt zeitartig. Liegen zwei Ereignisse auf derselben Mantellinie eines Lichtkegels, heißen sie lichtartig zueinander. Verläuft die Verbindungslinie im Äußeren der beiden Lichtkegel, heißt sie raumartig<sup>5</sup>. Keine zeitartige Linie kann je in eine lichtartige oder raumartige gespiegelt werden, keine raumartige Linie je in eine zeitartige oder lichtartige.

Wir sehen uns nun die mögliche Definition eines Abstands in der neuen Geometrie an. In der Galilei-Geometrie wurde die Bogenlänge einer Kurve allein vom Zeitablauf bestimmt. Deshalb war jeder Zuwachs an Bogenlänge ein Zuwachs an abgelaufener Zeit. Dieses Bild kann in der Minkowski-Geometrie zunächst nur auf zeitartige Linien übertragen werden. Die Länge der Weltlinie eines ruhenden Objekts (keine Änderung der Ortskoordinaten) ist die abgelaufene Zeit. Das bleibt auch bei einer Bewegung des Objekts so, wir müssen uns dann nur darauf beschränken, wieder nur die Uhr abzulesen, die das Objekt unmittelbar begleitet. Dieses Zeitmaß heißt *Eigenzeit*. Eine Uhr aus der Ferne oder die in einem Inertialsystem definierte Zeitkoordinate können etwas anderes zeigen. Der Ablauf der Eigenzeit wird nun nicht mehr nur von der Änderung der Zeitkoordinate, sondern auch von der Änderung der Ortskoordinaten bestimmt. Wenn wir im Folgenden nur unbeschleunigte Bewegungen zeichnen, erhebt sich die Frage, wie man bei allgemeinen Weltlinien vorzugehen

<sup>5</sup>In der strikt zweidimensionalen Welt ist die Benennung zeitartig und raumartig reine Vereinbarung. Wenn wir uns allerdings daran erinnern, daß die Ortskoordinate die Stelle dreier Raumkoordinaten hat, ist das Innere des Lichtkegels nicht mehr mit dem Äußeren austauschbar.

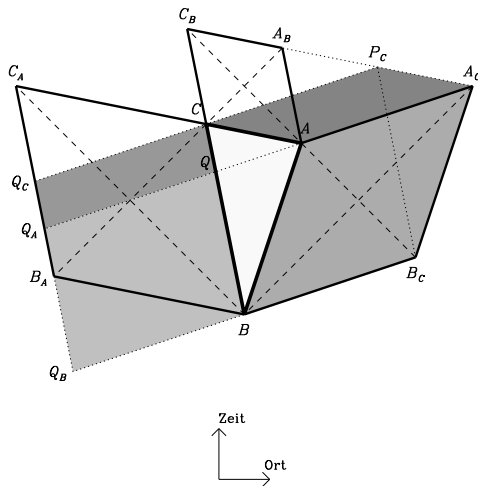


Abbildung 5.2: Der Satz des Pythagoras in der Minkowski-Geometrie

Wir zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck nach unserer neuen Regel, rechte Winkel zu konstruieren. Der rechte Winkel ist der Winkel bei  $C$ . Quadrate sind Rhomben mit Lichtlinien als Diagonalen (vier rechte Winkel und Symmetrie). Dann ergeben sich Kathetenquadrate und Hypotenusenquadrat wie gezeichnet. Der Flächenvergleich zeigt, daß die Differenz der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat ist [145].

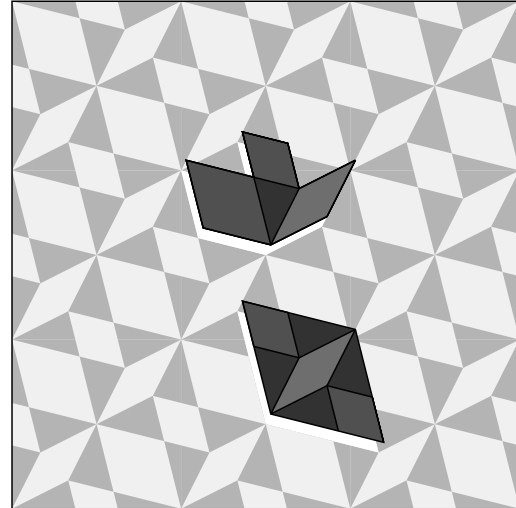


Abbildung 5.3: Ebenes Parkett mit Satz des Pythagoras (Minkowski-Geometrie)

Das Dreieck und die drei zugehörigen Minkowski-Quadrate können in ein Parkett eingebettet werden. Ersichtlich können wir vier Dreiecke, das Hypotenusenquadrat und zwei Exemplare des kleineren Kathetenquadrats zu einem Minkowski-Quadrat (Rhombus) zusammenfassen. Bis auf die Scherung ist die Fläche dieses Rhombus  $(a + b)^2$ . Wir schließen auf

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab - 2b^2 = a^2 - b^2.$$

hat. Da bleiben wir bei den in der euklidischen Geometrie geübten und bewährten Methoden: Die allgemeine Weltlinie einer beschleunigten Bewegung wird nur in kleine Stückchen zerlegt, die einzeln als unbeschleunigt behandelt und dann wieder zusammengesetzt werden, ganz wie das bei der Bogenlänge in der euklidischen Geometrie auch geschieht. Die Länge jedes einzelnen Stückchens ist die ablaufende Zeit auf einer begleitenden Uhr, d.h. im *momentanen Ruhssystem* des Objekts. Das bei den Bewegungen der Minkowski-Geometrie unveränderte Maß einer (zeitartigen) Weltlinie ist also das Zeitintervall, das von einer Uhr mit dieser Weltlinie abgezählt wird. Verschiedene Weltlinien zwischen zwei Ereignissen lassen verschiedene Bogenlängen und damit verschiedene Zeitdauer erwarten: Das Zwillingsparadoxon kündigt sich an.

Den Satz vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten verschieben wir auf das nächste Kapitel und sehen uns die Eigenzeit des Weltliniensgments einer sich bewegenden Uhr an. Dieses Problem entspricht in der euklidischen Geometrie der Bestimmung der Länge eines Segments, das gegen die Koordinatenachsen geneigt ist. Das

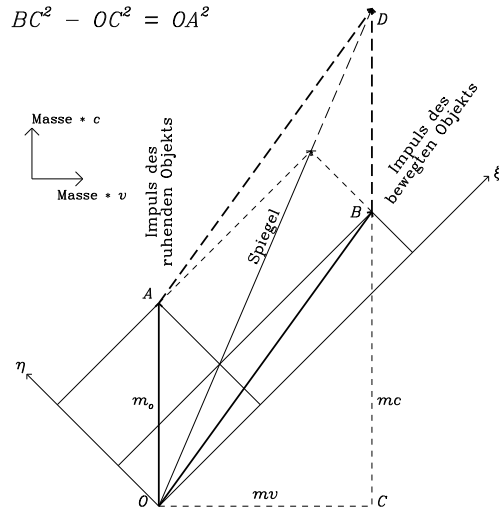


Abbildung 5.4: Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse. I.

Wir bewerten Abbildung 5.1 als Impulsdia-  
gramm.  $\vec{OB}$  ist jetzt der Impulsvektor eines sich bewegenden Objekts, das in Ruhe den Impulsvektor  $\vec{OA}$  hat. Wir stellen ihn mit der Spiegelung aus Abb. 5.1 oder mit dem Impulsparallelogramm zu Abb. 4.7 her. In dem rechtwinkligen Dreieck  $OBC$  ist  $OB$  die Hypotenuse, die der Länge nach gleich der Strecke  $OA$  ist. Der Satz des Pythagoras sagt uns nun, daß wir mit  $BC^2 - OC^2 = OB^2$  rechnen müssen. Nun ist aber  $OC/CB$  gerade gleich der Geschwindigkeit des Körpers in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit,  $OC/CB = v/c$ . Wir erhalten also

$$(m_0c)^2 = OB^2 = m^2(c^2 - v^2).$$

heißt, wir betrachten nun das Analogon des Satzes des Pythagoras in der Minkowski-Welt. Wir können ihn wieder mit elementaren Mitteln beweisen (Abb. 5.2). Analog zum Vorgehen Euklids finden wir

$$\begin{aligned} b^2 &= ACC_BA_B = ACP_C A_C = Q_A Q_C C Q \\ c^2 &= BAA_C B_C = Q_B Q_A Q_B \\ a^2 &= C_A B_A B C = Q_C Q_B B C \longrightarrow a^2 - b^2 = c^2 . \end{aligned}$$

Das Parkett in Abbildung 5.3 enthält dieselbe Figur und einen Rhombus, der mit dem binomischen Lehrsatz zum selben Ergebnis führt.

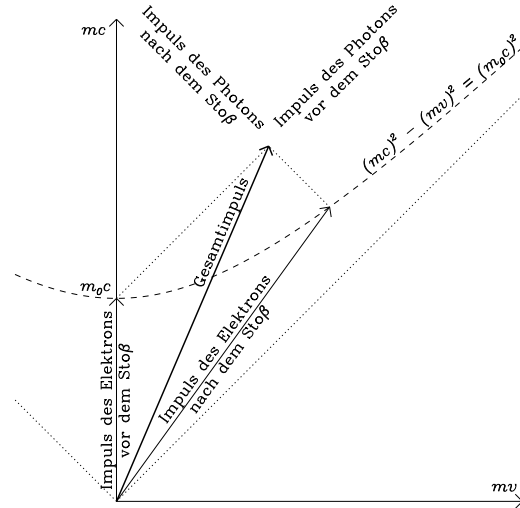


Abbildung 5.5: Der Compton-Effekt

Wir interpretieren Abb. 5.4 als Impulsdia-  
gramm eines Stoßes zwischen Photon (gepunktete Linien) und Elektron. Das Photon wird reflektiert, verliert aber Impuls (parallel zu seiner Frequenz, wie wir aus der Quantenmechanik wissen). Das ist der Compton-Effekt. Energie und Impuls werden auf das Elektron übertragen. Es erfährt einen Rückstoß, und seine Masse wächst entsprechend dem eben gefundenen Gesetz. Umgekehrt kann ein niederfrequentes Photon durch hochenergetische Elektronen auf hohe Frequenzen gestoßen werden. Dies ist der inverse Compton-Effekt, der in der Astrophysik große Bedeutung hat.

**Das Quadrat über der Hypotenuse ist flächengleich der  
Differenz der Quadrate über den beiden Katheten.**

Das Minuszeichen ist das Charakteristikum der Minkowski-Geometrie. Es hat zur Folge, daß das Quadrat der Hypotenuse Null und sogar negativ sein kann. Wir kommen deshalb überein, das Minuszeichen den Quadraten über raumartigen Seiten zuzuordnen. In Abbildung 5.2 muß also das eine Quadrat negativ gerechnet werden. Dann verlangt der Satz des Pythagoras hier die gleiche Addition wie in der euklidischen Geometrie. – Das Quadrat über einer zeitartigen Seite ist immer positiv. Seine Wurzel ist die auf diesem Segment ablaufende Eigenzeit. Das Quadrat über einer raumartigen Seite ist negativ. Die Wurzel des Betrages ist der Abstand der Endpunkte des Segments in dem Bezugssystem, in welchen die Endpunkte gleichzeitig sind. Wir nennen diesen Abstand entsprechend *Eigenlänge*. Das Quadrat über einer lichtartigen Seite entartet, seine Fläche ist Null. – Wählen wir cartesische Koordinaten mit Achsen entlang den beiden aufeinander senkrechten Seiten unseres Dreiecks, erhalten wir etwa  $C = [0, 0]$ ,  $A = [0, x]$  und  $B = [ct, 0]$ . Das Quadrat über der Hypotenuse ist dann

$$(AB)^2 = (ct)^2 - x^2 .$$

## 5.2 Einsteinsche Mechanik

Beginnen wir nun mit der Veränderung der Impulsdigramme. Diese muß so geschehen, daß *mechanisch* ununterscheidbare Konstruktionen nun auch kongruente Figuren der *Geometrie* sind, genauer der Geometrie, die wir aus der Spiegelung der Lichtausbreitung abgeleitet haben.

Zuerst benutzen wir die pseudoeuklidische Form des Satzes des Pythagoras, um die *Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse* zu berechnen (Abb. 5.4). Unser erklärtes Ziel ist ja, die Mechanik in Übereinstimmung mit der Lichtausbreitung zu bringen. Wir finden hier den ersten Punkt der neuen Mechanik, der sie von der klassischen unterscheidet. Mit Hilfe der Spiegelungsvorschrift aus Abbildung 5.1 stellen wir zwei Impulsvektoren her, die gleich lang sind, d.h., zu beiden gehört die gleiche *Ruhmasse*  $m_0$ . Wir können uns auch direkt auf den Impulssatz für die symmetrische Sprengung der Verbindung zweier gleicher Objekte berufen, wie wir sie in Abbildung 4.7 benutzt haben, und das Impulsparallelogramm  $OADB$  konstruieren.  $OD$  ist dann der Gesamtimpuls der beiden Objekte, deren Impuls einzeln  $OA$  und  $OB$  ist. Das Produkt  $mc$  ist die Zeitkomponente eines Impulsvektors, wie er im Stoß gemessen wird. Beim Stoß gilt für die Summe dieser Zeitkomponenten der Erhaltungssatz wie für die Summe der anderen Komponenten auch. Im einzelnen ändert sich die Zeitkomponente je nach Geschwindigkeit. Nur der Betrag des Impulsvektors bleibt bei den Bewegungen der Minkowski-Geometrie unverändert: Er ist ein Charakteristikum des betrachteten Objekts. Der Satz des Pythagoras lautet hier

$$m_0^2 c^2 = m^2 c^2 - m^2 v^2 . \tag{5.1}$$

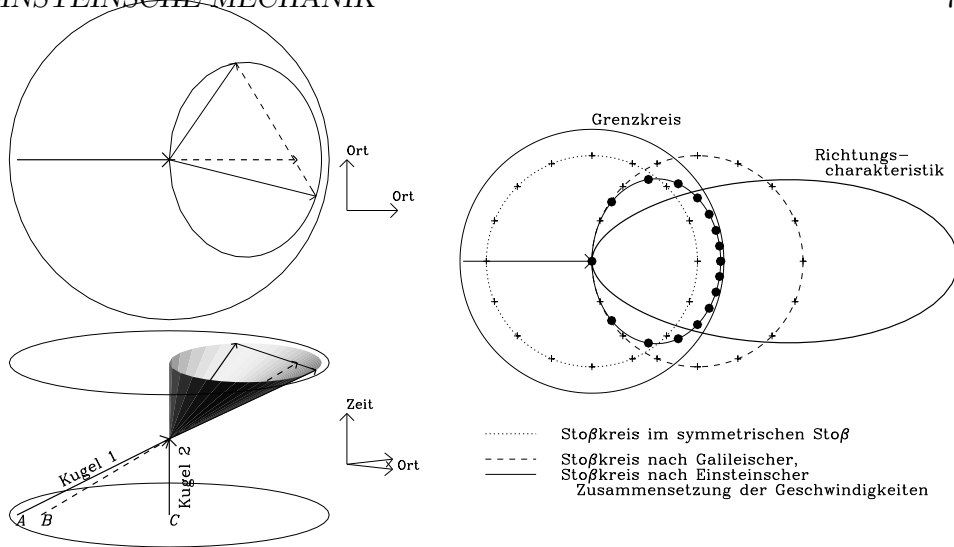


Abbildung 5.6: Der relativistische Billardstoß

Wir zeichnen die Anordnung von Abbildung 2.9, beachten nun aber, daß die Lichtgeschwindigkeit (markiert durch den Außenkreis) eine Grenze ist und die Reduktion der Impulse auf Geschwindigkeiten die variable Masse zu berücksichtigen hat ( $BC/AB = m[v]/m_0$ ). Die Galileische Relativität, die den Übergang von Abb. 2.8 in Abb. 2.9 begründet, ist außer Kraft. Halten wir an der Relativität fest, begründet die Streufigur eine andere Geometrie, eben die Minkowski-Geometrie der Welt. Die Punkte der oberen Schnittebene bestimmen Geschwindigkeiten. Sie werden uns in der hyperbolischen Geometrie wieder begegnen.

Abbildung 5.7: Die Stoßcharakteristik

Auf die Ellipse der Geschwindigkeiten sind die Punkte gezeichnet, die im Ruhssystem des Schwerpunkts (Abb. 2.8) gleichmäßig auf der Peripherie verteilt liegen. Sie deuten an, daß im relativistischen Fall die Streuung in Vorwärtsrichtung größeres Gewicht erhält. Die Stoßcharakteristik, die wie eine Antennenkeule die Wahrscheinlichkeit der Streuung in die verschiedenen Richtungen zeigt, hängt darüberhinaus von der genauen Form der Wechselwirkung zwischen den Stoßpartnern ab. Kann man die Stoßcharakteristik genau vermessen, findet man gerade diese Details, von denen wir sonst absehen.

Ist die Ruhmasse  $m_0$  gegeben, beschreiben die Impulskordinaten  $[mc, mv]$  eine Hyperbel, im Falle dreier Raumkoordinaten die Schale eines zweischaligen Hyperboloids, die *Massenschale* genannt wird. Der Impulsvektor eines Objekts gegebener Ruhmasse kann nur auf einer solchen Massenschale enden. Wir finden

$$(m_0c)^2 = m^2(c^2 - v^2) , \text{ also } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{5.2}$$

Das ist die berühmte Formel von der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse. Bei dieser Gelegenheit erinnern wir uns, daß die Masse physikalisch durch Stoß und Streuung definiert ist. Sehen wir uns also noch einmal den elastischen Stoß (Abb. 2.8 und 2.9) an. Der Kreis aus dem symmetrischen Fall erscheint nun beim Billardstoß

nicht mehr einfach schief verschoben, wie das bei einer additiven Zusammensetzung der Geschwindigkeiten sein muß. Statt dessen erhalten wir das in Abbildung 5.6 gezeichnete Bild. Der Kreis der nach einem bestimmten Zeitintervall erreichten Orte wird in eine Ellipse verformt. Der Mittelpunkt des Kreises – der Zielort beim ideal unelastischen Stoß – wird in einen Punkt verschoben, den wir als Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der im Einzelfall zusammengehörigen Endpunkte finden. Seine Abstände vom rechten und vom linken Rand der Ellipse stehen im Verhältnis der Massen der ruhenden und der stoßenden Kugel und zeigen experimentell die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse, die wir eben berechnet haben. Nun beobachtet man nicht unmittelbar die Geschwindigkeiten, sondern zunächst die Verteilung der Richtungen nach dem Stoß (Streuquerschnitt). Nehmen wir an, daß im Ruhssystem des Schwerpunkts, wo alles ganz symmetrisch zugeht, die Bewegungsrichtungen nach dem Stoß gleichförmig über den Kreis (im Raum über die Kugel) verteilt sind. Setzen sich die Geschwindigkeiten additiv zusammen, bleibt die Form des Kreises und die relative Lage der Punkte unverändert. Bei der Zusammensetzung nach Einstein wird nicht nur der Kreis in eine Ellipse (nach euklidischer Beurteilung) verformt, die homogen verteilten Punkte rücken auch in Vorwärtsrichtung zusammen (die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten hat die gleiche Form wie bei der Aberration, Abb. 4.10 oben). Wir können die Dichte über der Kugel auftragen und erhalten dann eine Stoßcharakteristik (den differentielle Streuquerschnitt), die nur vom Winkel gegen die Vorwärtsrichtung abhängt (Abb. 5.7). Nach additiver Zusammensetzung der Geschwindigkeiten wäre diese Charakteristik immer eine Kugel. Durch die Einsteinsche Addition wird diese Kugel in eine Keule gestreckt. Der Streckungsfaktor wächst mit dem Lorentz-Faktor  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  über jede Schranke. Er wird in allen Experimenten an Teilchenbeschleunigern beobachtet und berücksichtigt. – Die träge Masse  $m$  wächst unbegrenzt, wenn die Geschwindigkeit  $v$  sich der Lichtgeschwindigkeit  $c$  nähert, während die Ruhmasse *unverändert* gehalten wird. Der Limerick [30] drückt es so aus:

To her friends said the Bright once in chatter:  
 “I have learned something new about matter:  
 My speed was so great, much increased was my weight<sup>6</sup>,  
 Yet I failed to become any fatter!”

Gleichung (5.1) ist der Ausgangspunkt für Einsteins berühmte Formel für die Gesamtenergie eines Objekts. Wir begründen sie auf geometrischem (Abb. 5.8) und analytischem Wege. Der geometrische Weg stützt sich auf die Berechnung des Energiezuwachses als Produkt von Kraft und Weg, das wir umformen in

$$dE = \mathbf{F}d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}d\mathbf{r} = d\mathbf{p}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}d\mathbf{p} = \mathbf{v}d(m[v]\mathbf{v}) \stackrel{\text{Abb. 5.8}}{=} d(mc^2). \quad (5.3)$$

<sup>6</sup>Das Wort *weight* assoziiert mit der Schwerkraft. Es nimmt die Äquivalenz der trägen und schweren Masse voraus, wobei es nur die letztere ist, die auf einer gewöhnlichen Waage bestimmt wird.



Wir zeichnen die Hyperbel fester Ruhmasse und einen Impulsvektor, der auf ihr endet. Das Dreieck der Zuwächse ist dem der Impulskoordinaten ähnlich, denn die Richtung von Impuls und Zuwachs sind die Diagonalrichtungen eines Lichtecks. Deshalb gilt

$$\Delta(mc) = \Delta(mv) \frac{v}{c} .$$

Vergleichen wir diese Formel mit (5.3), so finden wir

$$\Delta(mc^2) = \Delta E .$$

Das Argument kann umgedreht werden. Ist  $E = mc^2$  gegeben, erhalten wir durch Differentiation  $\Delta(mc) = \Delta(mv) \frac{v}{c}$ . Das aber definiert eine Hyperbel, die Hyperbel fester Ruhmasse.

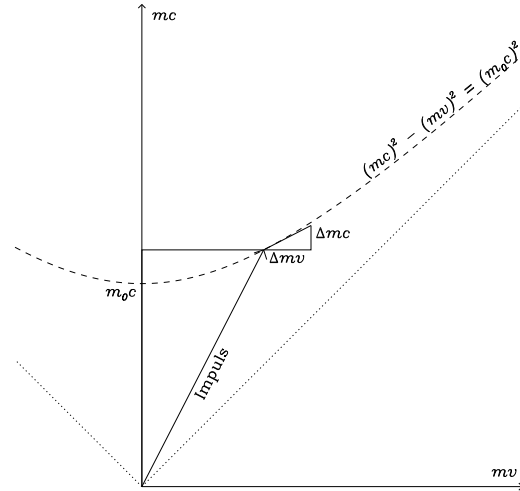


Abbildung 5.8: Energie und Masse

Wir können das integrieren. In unserem Fall (Gl. 5.1) ist das  $dE = d(mc^2)$  und  $E_{\text{kinetisch}} = mc^2 - m_0c^2$ . Ein anderer Gesichtspunkt ist die direkte Umformung für kleine Geschwindigkeiten. Gleichung (5.1) kann in der Form  $m^2c^2 = m_0^2c^2 + m^2v^2$  geschrieben werden. Das formen wir um in

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{m}{m + m_0}mv^2 .$$

Dafür finden wir leicht eine Näherung für kleine Geschwindigkeiten (d.h.,  $m_0 \approx m$ ):

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{m}{m + m_0}mv^2 \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}mv^2 . \quad (5.4)$$

Den zweiten Term kennen wir aus der Newtonschen Mechanik: Es ist die kinetische Energie. Den ersten Term nennen wir Ruhenergie. Das zunächst nur ein Name. Interessant wird es erst, wenn wir sehen, daß diese Ruhenergie mobilisiert werden kann. Bei elastischen Stößen bleibt die Summe der kinetischen Energien erhalten, wie also auch die Summe der Ruhenergien erhalten bleiben muß. Anders bei unelastischen Stößen. Hier ist die Bilanz der kinetischen Energien nicht ausgeglichen, folglich kann auch die Bilanz der Ruhenergien nicht ausgeglichen sein: Ruhenergie und kinetische Energie setzen sich ineinander um<sup>7</sup>. Die Summe der Ruhenergien und der kinetischen Energien ist gerade proportional zur vierten Komponente des Gesamtimpulses und muß erhalten bleiben. Deshalb ist die vierte Komponente des

<sup>7</sup>Es gibt auch Stöße, bei denen sich Ruhenergie in kinetische umsetzt. Wir nennen sie superelastische Stöße oder auch Stöße zweiter Art. Die Zerstrahlung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren ist das extremste Beispiel.

Impulses jedes einzelnen isolierten Objekts proportional zu seiner Gesamtenergie. Da diese vierte Komponente auch proportional zur trägen Masse ist, gilt eine *Äquivalenz von Energie und träger Masse*. Dies ist der Inhalt der berühmten Formel

$$E = mc^2 . \quad (5.5)$$

Die Gesamtenergie eines Objekts kann als träge Masse gemessen werden. In der Newtonschen Mechanik war die Energie immer nur bis auf eine freie Konstante bestimmt. Diese Wahlfreiheit ist nun verschwunden, weil die träge Masse sie nicht enthält. – Zunächst ist die Energie proportional der trägen Masse. Es ist deshalb nicht ganz genau, wenn man hier schon sagt, die Energie kann durch Wägung festgestellt werden. Das ist erst nach einer weiteren prinzipiellen Beobachtung erforderlich, der Feststellung der Proportionalität von träger und schwerer Masse<sup>8</sup>. – Es ist ein Fehler, wenn man sagt, Energie und Masse wandeln sich ineinander um. Beide bleiben streng erhalten, eins ist das Maß des anderen. Nur einzelne Bestandteile der Energie wandeln sich ineinander um. – In gebundenem Zustand ist die Gesamtenergie kleiner als die Energie der Teile im dissoziierten Zustand, dementsprechend ist die Ruhmasse des gebundenen Systems kleiner als die Summe der Ruhmassen seiner Teile. Die Differenz heißt *Massendefekt*. Er ist der Bindungsenergie proportional. Ist er negativ, ist also die Energie des Gesamtsystems größer als die Summe der Energien der Teile, so kann das gebundene System nicht stabil sein: Es zerfällt in seine Bestandteile, wobei die dem Massendefekt entsprechende Energie als kinetische Energie der Bruchstücke erscheint. Ein Beispiel ist die Instabilität des Neutrons, dessen Ruhmasse etwas größer als die des Protons ist, und das als freies Teilchen in ein Proton und zwei andere Teilchen zerfällt. Ist das Neutron aber in einem Kern genügend fest gebunden als ein Proton an seiner Stelle, kann es nicht mehr zerfallen, weil die Ruhmassendifferenz dann auch noch die Differenz der Energien dieser Bindung ausgleichen müßte.

### 5.3 Kinematische Besonderheiten

Wir beginnen damit, den Doppler-Effekt (Abb. 5.9) relativistisch zu analysieren. Die bei Abbildung 2.17 vorgenommene Bewertung muß nun die Relativität der Gleichzeitigkeit beachten. Die gefundene Periodenänderung erweist sich als Doppelverhältnis (Abb. 8.5). – Wir können den Doppler-Effekt in Kombination mit dem Relativitätspostulat benutzen, um die Minkowski-Geometrie herzuleiten [17]. Wir zeigen dazu hier nur den ersten Schritt, den Vergleich von Längen auf Geraden verschiedener Richtung, das ist der Transport der Einheiten zwischen Objekten in relativer Bewegung. Wir argumentieren mit dem Relativitätsprinzip. Der Doppler-Effekt soll

---

<sup>8</sup>Die Wägung sieht zunächst merkwürdig aus, denn niemand sagt: „Ich habe mich auf die Waage gestellt und gefunden, daß meine Gesamtenergie um drei MegaJoules zugenommen hat.“ Der größte Teil der sich in der Gesamtmasse zeigenden Energie kann nie als reale Arbeit umgesetzt werden. Darüberhinaus trägt 1 MegaJoule nur etwa  $10^{-8}$  g zum Gewicht bei.

symmetrisch sein, beide die Signale austauschenden und vergleichenden Apparate sollen die gleiche Frequenzverschiebung messen, schließlich ist bis auf die räumliche Orientierung die Relativgeschwindigkeit die gleiche. Es soll also  $OB/OA = OC/OB$  gelten, falls in den entsprechenden Einheiten gemessen wird. Ersichtlich ist die Hypothese einer universellen Zeit zum Einheitenvergleich jetzt ungeeignet. Abbildung 5.9 zeigt, wie ein Intervall  $OH$  auf  $OB$  gefunden werden kann, das zu  $OA$  gleich lang ist. Der Punkt  $A$  markiere die Zeiteinheit auf  $OC$ . Nun suchen wir den Einheitspunkt auf  $OB$  derart, daß  $OC/OA = (OB/OH)^2$ . Dann ist der Doppler-Effekt symmetrisch, so daß er durch die Relativgeschwindigkeit allein bestimmt ist. Nach Projektion auf die lichtartigen Richtungen  $OE$  und  $OF$  erreicht diese Bedingung die Formen  $OC_1/OA_1 = (OA_1/OH_1)^2$  und  $OB_2/OA_2 = (OH_2/OA_2)^2$ . Berücksichtigen wir nun die Gleichheit  $OB_2/OA_2 = OC_1/OA_1$ , ergibt sich  $OH_1 \cdot OH_2 = OA_1 \cdot OA_2$ . Das heißt, die Einheitspunkte  $A$  und  $H$  liegen auf einer gemeinsamen Hyperbel mit den lichtartigen Richtungen als Asymptoten, wie wir das entsprechend den Abbildungen 5.1 und 5.4 erwarten müssen.

Akzeptiert man die Formel  $E = mc^2$  für Lichtquanten (etwa mit der feldtheoretischen Begründung, daß der Betrag der Impulsdichte einer elektromagnetischen Welle multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit gleich der Energiedichte ist [36], oder mit der quantenphysikalischen Begründung für  $E = h\nu$  und  $p = h\nu/c$  [107]), so zeigt der Doppler-Effekt, daß  $\Delta E = \Delta mc^2$  dann für alle Körper gelten muß, die spontan ein Photonenpaar symmetrisch abstrahlen können. Ein solcher Körper ruht vor und nach der Emission, wenn diese symmetrisch ist und die Impulse der Photonen ( $p_1 = -h\nu/c$ ,  $p_2 = h\nu/c$ ) entgegengesetzt gleich sind. In einem mit  $-v$  bewegten Bezugssystem lautet dann der Impulssatz

$$m_{\text{vorher}}v = m_{\text{nachher}}v + \frac{h\nu}{c} \left( \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \right)$$

Die abgestrahlte Energie ist hier

$$\Delta E = h\nu \left( \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} + \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \right),$$

und wir erhalten

$$m_{\text{vorher}}c^2 = m_{\text{nachher}}c^2 + \Delta E$$

Die Masse nach der Emission muß also um den bekannten Betrag verringert sein. Wir wissen heute, daß es Objekte gibt, die sich vollständig in Strahlung umsetzen können. Deshalb können wir Einsteins Formal ableiten, indem wir Abbildung 5.4 neu lesen (Abb. 5.10).

Das gleiche Zeichnungsgerüst, das wir zur Berechnung der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse benutzt haben, können wir nun auch hinsichtlich der ablaufenden Zeit auswerten. Wir finden die *Zeitdilatation* (Abb. 5.11). Wir betrachten

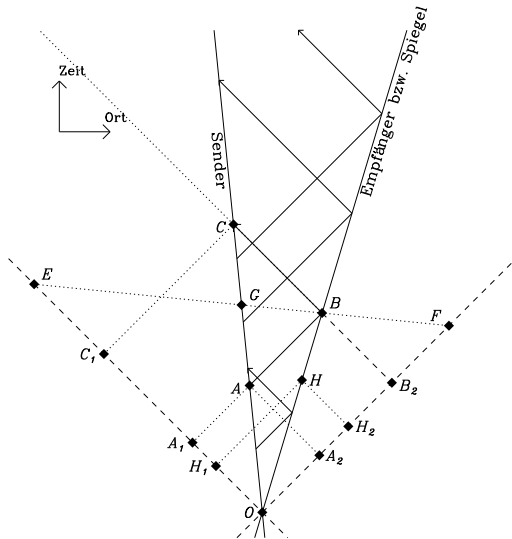


Abbildung 5.9: Der relativistische Doppler-Effekt

Wir zeichnen die Weltlinien eines Senders und eines Spiegels zusammen mit den lichtartigen Richtungen. Die Periodenänderung hängt nur von der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Spiegel ab. Um das zu zeigen, ziehen wir durch  $B$  die Gerade  $EF$  der mit  $B$  im Bezug auf den *Sender* gleichzeitigen Ereignisse ( $EG = GF$ ).  $GB/OG$  ist nun die Geschwindigkeit des Spiegels relativ zum Sender. Die Punktreihe  $CAO$  wird nun erst auf  $CBB_2$  und dann auf  $GBF$  projiziert. Mit der Invarianz des Doppelverhältnisses bei Projektionen (Abb. 8.5) erhalten wir  $CO/AO = CB_2/BB_2 = (GB/GE) : (FB/FE) = \frac{c+v}{c-v}$ .

Wir können mit dem Diagramm auch den Punkt  $H$  auf  $OB$  finden, der von  $O$  den gleichen Abstand wie  $A$  auf  $OC$  hat (siehe Text).

dazu den Zeitablauf auf einer bewegten Uhr. Die Zeitintervalle im Ruhssystem des Betrachters sind die Projektionen der Abschnitte der Weltlinie der bewegten Uhr auf die Zeitachse. Die Zeitintervalle  $d\tau$  auf der bewegten Uhr sind dagegen über den Satz des Pythagoras mit der zurückgelegten Wegstrecke modifiziert. Damit sind die Projektionen immer länger als die Abschnitte auf den Weltlinien bewegter Objekte. Es gilt

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

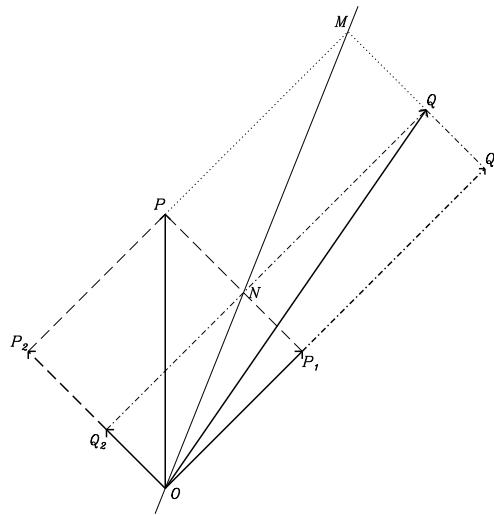


Abbildung 5.10: Die Zerstrahlung eines Teilchens in Bewegung

Wenn ein Teilchen in Ruhe (Weltlinie parallel  $OP$ ) in zwei Photonen zerfällt (Weltlinien parallel  $OP_1$  und  $OP_2$ ), dann müssen die Ortskomponenten ihrer Impulse entgegengesetzt gleich sein. Nach Spiegelung an der Weltlinie  $OM$  konstruieren wir mit dem Lichteck  $PMQN$  erhalten wir aus  $OP$  die Richtung  $OQ$ , die Photonenrichtungen bleiben jedoch gleich. Das Impulsparallelogramm muß also ähnlich  $OQ_1QQ_2$  sein. Die  $mv$ -Koordinaten der Photonen  $OQ_1$  und  $OQ_2$  ergeben sich aus dem Doppler-Effekt. Die Geschwindigkeit zu  $OQ$  ist bekannt, und so finden wir die Masse zu  $OQ$  als Funktion der Energie der Photonen.

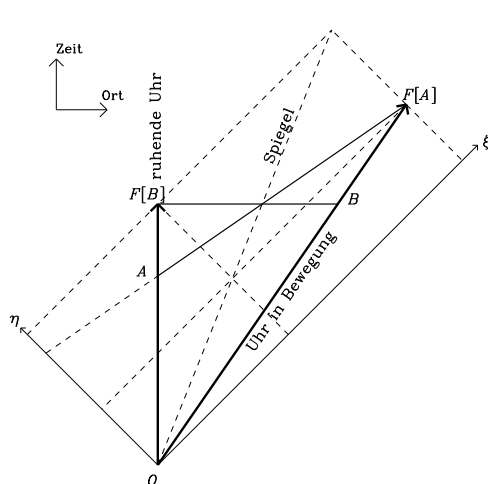


Abbildung 5.11: Die Symmetrie der Zeitdilatation

Wir werten mit Abbildung 5.1 die Zeitkoordinaten der Ereignisse aus.  $F[B]$  ist auf  $OA$  gleichzeitig zu  $B$ ,  $F[A]$  ist auf  $OB$  gleichzeitig zu  $A$ . Die Projektion einer Strecke ist also immer *länger* als die projizierte Strecke.

$(OF[A])^2 - (AF[A])^2 = (OA)^2 < (OF[B])^2$ ,  
 $(OF[B])^2 - (BF[B])^2 = (OB)^2 < (OF[A])^2$ .  
 Dabei ist diese Aussage völlig symmetrisch und überdies streng homolog der Aussage der euklidischen Geometrie, nur daß dort die Projektionen immer *kürzer* als die projizierten Strecken sind.

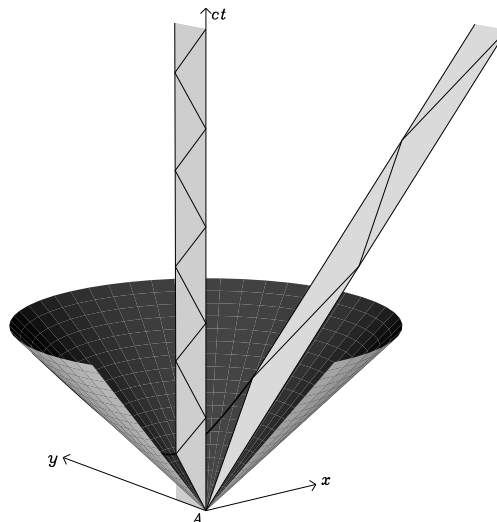


Abbildung 5.12: Zeitdilatation und Lichtuhr

Wir zeigen den Fahrplan zweier Lichtuhren, eine im Bezugssystem ruhend, die andere in Bewegung. Die Uhren werden lateral bewegt. Der Schnitt der Streifen mit einem Lichtkegel am Punkt  $A$  zeigt den Weg der Photonen in der Lichtuhr und damit ihren Gang. Evident ist der Gang der bewegten Uhr (geneigter Streifen) langsamer als die in Ruhe (senkrechter Streifen) – falls gleichzeitige Ereignisse entsprechend der Zeit im Ruhesystem bestimmt werden.

Das berühmteste Beispiel für diesen Unterschied zwischen den Zeitintervallen eines Prozesses in seinem Ruhesystem und seiner Projektion auf ein anderes Bezugssystem ist das Myon in kosmischen Teilchenschauern. Das Myon – gebildet in der oberen Atmosphäre durch einen unelastischen Stoß anderer Teilchen – zerfällt nach einer inneren Uhr, die entsprechend quantentheoretischen Gesetzen abläuft, bereits nach etwa  $10^{-8}$  s. Nach höchstens 3 m Flugweg sollte diese Zeit verbraucht sein. Dennoch kann das Myon 100 km zurücklegen, weil dafür viel mehr Zeit des ortsfesten Beobachters zur Verfügung steht. Die Zeitdilatation ist Voraussetzung nicht nur für die Beobachtbarkeit der Myonen der Höhenstrahlung, sondern auch für die Möglichkeit, instabile Teilchen in einem Beschleuniger zu präparieren.

Dabei ist die Zeitdilatation durchaus symmetrisch. Vom Standpunkt des vorbeifliegenden Teilchens bewegt sich das Labor, und der Zeitablauf der Uhr auf dem Labortisch erscheint gestreckt. Der Zeitvergleich findet aber zwischen anderen Ereignissen als vorher statt und produziert *keinen* Widerspruch (Abb. 5.11). Die Zeit-

dilatation ist nicht so seltsam, wenn wir uns die euklidische Entsprechung ansehen. Auch in der euklidischen Geometrie ist es kein Widerspruch, daß bei gleich langen Schenkeln eines Winkels die Projektion jedes Schenkels auf den jeweils anderen kürzer als der projizierte Schenkel ist, und dies ist ebenfalls ganz symmetrisch.

Mit Hilfe der konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts können wir eine ideale Uhr konstruieren, die ein Lichtsignal zählt, das immer wieder an den Enden eines Hohlraums konstanter Länge reflektiert wird. Die Regelmäßigkeit ihres Gangs hängt nur von der Konstanz der Länge und der Lichtgeschwindigkeit ab, nicht von den Feinheiten des Uhrenbaus. Darüber hinaus können wir ihren Gang geometrisch bestimmen (Abb. 5.12). Wir sind ihr schon bei der Diskussion des Michelson-Versuchs begegnet (Abb. 4.4). Je mehr der Streifen (der Fahrplan der lateral bewegten Uhr) geneigt ist, desto schneller bewegt sich die Uhr und desto langsamer ist ihr Gang verglichen mit der Zeit des Bezugssystems. Die Einheit ist bestimmt durch den Schnitt des Streifens mit dem Lichtkegel. Die Streifen verschiedener Neigung in Richtung der  $x$ -Achse und gleicher Ausdehnung in  $y$ -Richtung schneiden den Lichtkegel in einer Ebene  $y = \text{konstant}$ . Die Schnittkurve ist also ein Kegelschnitt, genauer die Hyperbel, die wir schon in den Abbildungen 5.1 und 5.4 gefunden haben.

Die Symmetrie der Zeitdilatation ermöglicht die Formulierung eines *Zwillingsparadoxons*, auch *Uhrenparadoxon* genannt (Abb. 5.13, 5.14). Wir ersetzen den Vergleich der Koordinate Zeit mit *einer* bewegten Uhr durch den Vergleich *zweier* Uhren. Dazu müssen beide Uhren mehrmals zusammentreffen (in Abb. 5.13 sind das die Ereignisse  $A$  und  $B$ ). Nur eine Uhr kann dann unbeschleunigt bleiben, die andere, die bei Relativbewegung sich erst entfernt, muß irgendwann (Ereignis  $C$ ) zurückkehren. Die schlichte Addition der Eigenzeitelemente dieser zweiten Uhr liefert dann einen Wert, der wegen der Zeitdilatation kleiner ist als das Zeitintervall, das auf der ersten Uhr abgelaufen ist. Schließlich war die zweite Uhr relativ zur ersten immer in Bewegung, und die Zeit auf der ersten Uhr setzt sich aus den Projektionen der Weltlinienstücke der zweiten Uhr zusammen (Abb. 5.13):  $AB$  ist die Weltlinie eines ortsfesten Betrachters,  $ACB$  die eines Reisenden. Es gilt die Dreiecksungleichung  $d[A, C] + d[C, B] < d[A, D] + d[D, B] = d[A, B]$ . Der Reisende braucht weniger Zeit als der Daheimgebliebene. Wir finden den allgemeinen Satz: In einem Dreieck aus Weltlinien ist jetzt die längste Seite *länger* als die Summe der beiden anderen. Dies ist die Dreiecksungleichung der pseudoeuklidischen Geometrie<sup>9</sup>. In der euklidischen Geometrie haben wir bereits eine analoge Situation. Der einzige Unterschied ist das Vorzeichen. In der euklidischen Geometrie ist die dritte Seite ja immer *kürzer* als die Summe der beiden anderen. Die gerade Verbindung zwischen zwei Punkten ist die *kürzeste*. In der pseudoeuklidischen Geometrie ist die Länge einer Weltlinie aber die Zeit, die ein nach dem Fahrplan der Weltlinie bewegter Beobachter auf seiner Taschenuhr abliest. Wir haben gesehen, daß die ablaufende Zeit vom Fahrplan der

<sup>9</sup>Es gibt Versuche, die Minkowski-Geometrie als Effekt der Selbstwechselwirkung von Feldern in einer ansonsten *euklidischen* vierdimensionalen Welt zu verstehen [82], allerdings ohne bleibenden Erfolg.

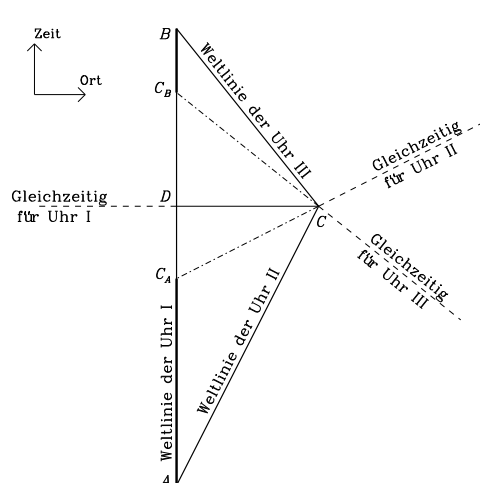


Abbildung 5.13: Zwillingsparadoxon und Dreiecksungleichung

Wir zeichnen ein Dreieck  $\triangle ACB$  aus zeitar-tigen Strecken und fällen das Lot  $DC$  auf die längste der drei Seiten. Wegen des Minuszeichens im Satz des Pythagoras ist nun  $AD$  länger als  $AC$  und  $DB$  länger als  $CB$ . Die Seite  $AB$  ist also länger als die Summe der beiden anderen Seiten. – Bei der Projektion der Linie  $AB$  auf  $ABC$  muß man den Unterschied der Lote  $CC_A$  und  $CC_B$  beachten.  $AC_A$  wird auf  $AC$  und  $C_B B$  auf  $CB$  projiziert.

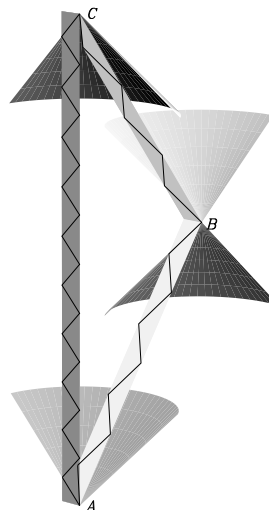
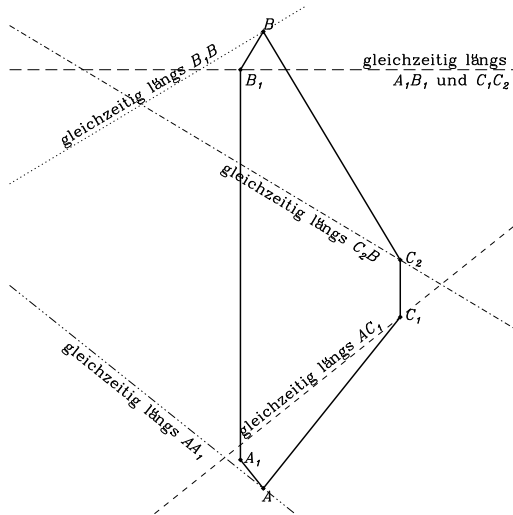


Abbildung 5.14: Zwillingsparadoxon und Lichtuhr

Der Reisende wie der Daheimbleibende sind mit Lichtuhren (Abb. 5.12) ausgerüstet. Deren Gang wird durch die entsprechenden Lichtkegel bestimmt. In unserer Abbildung zählen wir sieben Perioden für den Reisenden und zehn für den Daheimgebliebenen. Evident kann das Netz der sich schneidenden Linien, die zur Konstruktion herangezogen werden, nicht durch Spiegelungen oder Minkowski-Drehungen (d.h. durch Änderung des Bezugssystems) der Gesamtfigur geändert werden. Das Resultat ist also Ausdruck der invarianten Dreiecksungleichung der Minkowski-Geometrie.

Uhr abhängt. Die direkte gerade (unbeschleunigte, ungeknickte) Weltlinie zwischen zwei Ereignissen ist nun die *längste*.

Es ergibt sich schon dadurch eine ungewohnte Situation, daß überhaupt Unterschiede auftreten. Der Vergleich mit der euklidischen Geometrie zeigt aber, daß von diesem Standpunkt aus eigentlich die Galilei-Geometrie und damit die klassische Mechanik merkwürdig ist, weil dort die Länge einer Weltlinie zwischen zwei Ereignissen nur von diesen Ereignissen und *nicht* von der Form der Verbindungslinie abhängt. – Geradezu paradox scheint die Möglichkeit, die Aussage einfach umzukehren. Bezogen auf den Reisenden ist der Daheimgebliebene in ständiger Bewegung. Sollte er oder sie nicht mit gleichem Recht Opfer der Zeitdilatation sein? Diese Frage bildet das Zwillingsparadoxon im engeren Sinne. Sie setzt voraus, daß die Gründe für die verschiedenen Zeiten beim Ablesen bei  $B$  einfach umgekehrt werden können,



Man kann die zwei Weltlinien der Zwillinge so präparieren, daß beide die gleichen Beschleunigungen erfahren, nur eben die einzelnen Abschnitte gleichförmiger Bewegung verschieden lang sind. Die Figur aus Abb. 5.13 entsteht, wenn die Gerade  $A_1B_1$  an  $AB$  heranrückt und sich  $C_1C_2$  so weit entfernt, daß  $C_1$  und  $C_2$  zusammenfallen. Zur Hilfe für den analysierenden Leser sind die entsprechenden Linien gleichzeitiger Ereignisse angegeben.

Abbildung 5.15: Zwillingsparadoxon mit symmetrischen Beschleunigungen

womit ein Widerspruch festgestellt wäre. Nun gibt es aber einen Unterschied beider Weltlinien, das ist der Umkehrpunkt  $C$ , wo Geschwindigkeit und Ruhssystem des Reisenden geändert werden. Der Daheimgebliebene unterliegt *auch* der Zeitdilatation, das ist richtig, aber sie muß für beide Teile der Weltlinie des Reisenden gesondert bestimmt werden. Die Analyse zeigt, daß es nur Teile der Weltlinie des Daheimgebliebenen sind, die auf die des Reisenden projiziert werden. Bezogen auf den Reisenden sind die Projektionen der Weltlinie des Daheimgebliebenen zwar auch kürzer als die Weltlinie selbst, aber es wird nicht das gesamte Segment  $AB$  auf die Weltlinie des Reisenden projiziert, sondern nur  $AC_A$  auf  $AC$  und  $C_BB$  auf  $CB$ . Die Zeitdilatation sagt  $d[A, C_A] + d[C_B, B] < d[A, C] + d[C, B]$ , und das ist *kein* Widerspruch zu  $d[A, B] > d[A, C] + d[C, B]$ .

Die Beschleunigung bei  $C$  trägt nichts Entsprechendes zum Zeitvergleich bei. Wir können die Uhr des Reisenden durch zwei unbeschleunigte Uhren ersetzen, die sich bei  $C$  begegnen und ihren Stand vergleichen. Dann bedarf der Reisende keiner Uhr, die eine Beschleunigung über sich ergehen lassen muß. Daher ist die Antwort auf die Frage der Symmetrie *ja*, die Uhr des Daheimgebliebenen ist auch vom Standpunkt des Reisenden verlangsamt, aber *nicht alle* beim Daheimgebliebenen verstreichende Zeit wird mit der des Reisenden verglichen. – Das Nachdenken über den Effekt einer Beschleunigung der Uhr ist eine zusätzliche Verfeinerung und berührt die Feststellung der Dreiecksungleichung *nicht*. Der primäre Effekt ist der Zeitunterschied in  $B$ , der gerade der Dreiecksungleichung entspricht. Er ist proportional zur *Gesamtgröße* des Dreiecks. Die Beschleunigung einer Uhr betrifft dagegen den *Winkel* bei  $C$  und kann nur solche Effekte verursachen, die *nicht* proportional zur Größe des Dreiecks sind. Deshalb können diese immer vom primären Effekt getrennt werden. Im Grunde kann eine Beschleunigung ihrerseits zwei Arten von Effekten liefern. Einmal ist das eben der konstante Beitrag, der auf die Störung der Uhr während der Beschleunigung



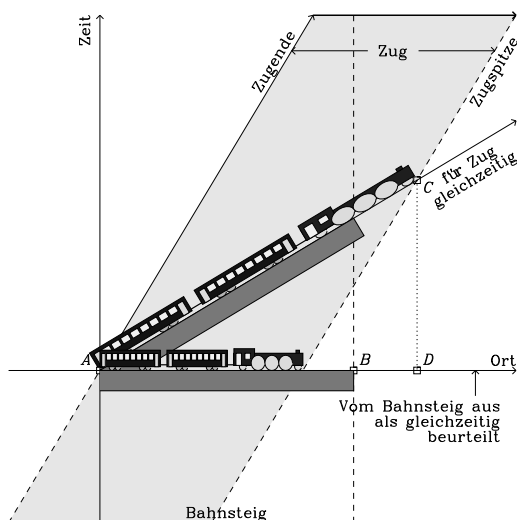


Abbildung 5.16: Die Symmetrie der Längenkontraktion

Wir zeichnen die Weltlinien eines fahrenden Zuges vor dem ortsfesten Bahnsteig. Wenn der Zug so lang sein soll wie der Bahnsteig, muß  $AD^2 - CD^2 = AB^2$  sein.  $D$  liegt also außerhalb von  $AB$ . Vom Zug aus beurteilt, ist der Bahnsteig kürzer. Allerdings liegt  $B$  auch rechts der Weltlinie der Spitze des Zugs. Vom Bahnsteig aus beurteilt, ist der Zug kürzer. Man vergleiche mit Abbildung 2.15. In jedem der beiden Fälle erscheint die jeweils andere Ableseung nicht zur gleichen Zeit stattzufinden, deshalb ist der Unterschied im Ergebnis auch gut begründet.

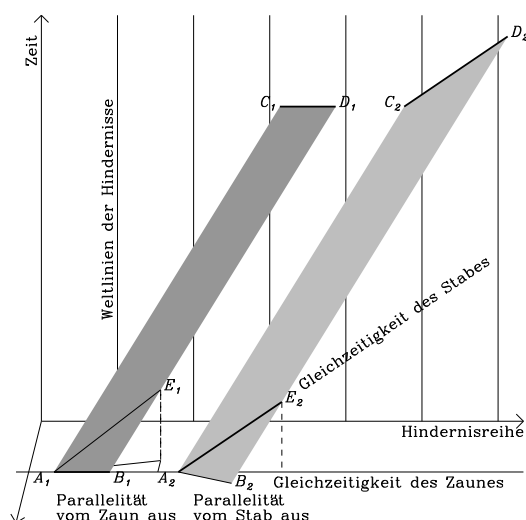


Abbildung 5.17: Ein Paradoxon der Längenkontraktion

In einer 2+1-dimensionalen Welt zeichnen wir zwei gleichförmig bewegte Stäbe und eine Hindernisreihe (einen Zaun) in Ruhe. Die Ruhlänge der Stäbe ( $A_1E_1$  bzw.  $A_2E_2$ ) sei gleich dem Abstand der Hindernisse in deren Ruhssystem. Der linke Stab ist parallel zur Hindernisreihe in *deren* Ruhssystem, d.h., die räumlichen Projektionen von  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$  sind parallel. Er scheint verkürzt und kann passieren. Der rechte Stab ist auch parallel zur Hindernisreihe, aber in *seinem* Ruhssystem, d.h., die räumlichen Projektionen von  $A_2E_2$  und  $C_2D_2$  sind parallel. Die Hindernisse scheinen verengt, der Stab kann nicht passieren.

zurückzuführen ist. Zum ändern kann sich die Periode der Uhr irreversibel ändern<sup>10</sup>. Der erste Effekt würde einen Beitrag unabhängig von der Dauer des Experiments liefern, wenn nur die Beschleunigungsphase immer gleich bleibt. Der zweite Effekt wirkt noch nach dem Ende des Experiments. Keiner der beiden Effekte kann die Zeitdilatation kompensieren<sup>11</sup>.

Das merkwürdige Verhalten der Zeitkoordinate finden wir auch bei Längenver-

<sup>10</sup>Man kann während der Beschleunigung graue Haare bekommen, danach aber wie vorher altern. Das wäre ein Effekt vom ersten Typ. Man kann auch erkranken und nach der Beschleunigungsphase permanent schneller altern. Das wäre ein Effekt der zweiten Art.

<sup>11</sup>Es gibt auch Untersuchungen zu Weltlinien mit gleichen Beschleunigungen (Abb. 5.15) [19] und zu solchen ganz ohne Beschleunigung auf mehrfach zusammenhängenden Welten [32].

gleichen wieder. Die Auswertung bezüglich der Längen erfordert allerdings die Erweiterung der Zeichnung auf *zwei* parallele Weltlinien, etwa der Enden eines bewegten Stabes oder eines Zuges auf gerader Strecke. Wir analysieren so die *Längenkontraktion* (Abb. 5.16). Die Geschichte eines ausgedehnten bewegten Objekts (Zug) ist ein schiefer Streifen in der Ort-Zeit-Ebene. In Ruhe (Bahnsteig) beschreibt ein Objekt dagegen einen vertikalen Streifen. Der Vergleich der Breite beider Streifen hängt ersichtlich von der Bestimmung der Gleichzeitigkeit ab. Ist der Zug in seinem Ruhesystem so lang wie der Bahnsteig in seinem eigenen, erscheinen beide im Ruhesystem des anderen kürzer als der andere. Wenn das Zugende in den Bahnsteig einfährt, hat die Zugspitze den Bahnsteig noch nicht voll durchmessen, wenn die Zeitpunkte gleichzeitig im System des Bahnsteigs gewählt sind. Vom System des Zuges aus beurteilt haben wir allerdings vorn viel zu früh abgelesen. Wenn nach den Uhren des Zuges der Zugführer in dem Moment aus dem Fenster schaut, wenn das Zugende einfährt, hat er die Ausfahrtsignale längst passiert. Die erste Messung scheint eben zu früh abgelaufen zu sein. Das bewegte Objekt erscheint immer verkürzt [30].

A fencing instructor named Fisk  
 In duels was terribly brisk.  
 So fast was his action, Fitzgerald contraction  
 Foreshortened his foil to a disk<sup>12</sup>.

Die Längenkontraktion ist also ein symmetrischer Projektionseffekt wie die Zeitdilatation auch<sup>13</sup>. – Man kann fragen, weshalb die Länge bewegter Objekte zu *kurz* gemessen wird, wo doch die Messung der Zeitintervalls auf bewegten Objekten immer zu *groß* ausfällt. Die einfache Projektion raumartiger Segmente ist tatsächlich *größer* als die Segmente selbst (in Abb. 5.16 ist das Segment *AD* länger als *AC*), aber die Messung impliziert eben auch die Relativität der Gleichzeitigkeit. Deren Effekt überkompensiert den Projektionseffekt. Das Resultat ist eine *Längenkontraktion*.

Die Symmetrie der Längenkontraktion erlaubt nun wieder die Formulierung von Paradoxa, die ganz analog dem Zwillingsparadoxon zu analysieren sind. Wir zitieren hier das von Shaw [123] vorgestellte Paradoxon der Längenkontraktion (Abb. 5.17). Ein Stab bewegt sich in seiner Längsrichtung entlang einer parallelen Hindernisreihe (einer Art Zaun) und driftet dabei langsam gegen diesen Zaun. Der Abstand der Hindernisse im Ruhesystem des Zauns und die Ruhlänge des Stabes sollen gleich sein. Hat der Stab die Gelegenheit, die Hindernisreihe zu passieren? Vom Standpunkt des Zaunes aus ist der Stab wegen seiner Bewegung verkürzt, paßt also gut zwischen zwei Hindernisse und kann auf die andere Seite wechseln. Vom Standpunkt des Stabes

<sup>12</sup>Der Durchmesser der Scheibe ist aber nicht größer als der Durchmesser der Klinge! Knopf wäre also genauer als Scheibe, würde sich aber nicht reimen.

<sup>13</sup>Die Momentaufnahme eines bewegten Objekts enthält nicht nur die Längenkontraktion, sondern muß auch noch die unterschiedlichen Lichtwege von den verschiedenen Punkten des Gegenstands zum Objektiv berücksichtigen. Die Berechnung des Anblicks ist also ein gesondertes Problem [109]. Stehen die zwei Augen hintereinander, findet die Längenkontraktion des Augenabstands ihre Entsprechung in einer Längenkontraktion des stereoskopischen Bildes (Abb. 4.10 und 4.11).

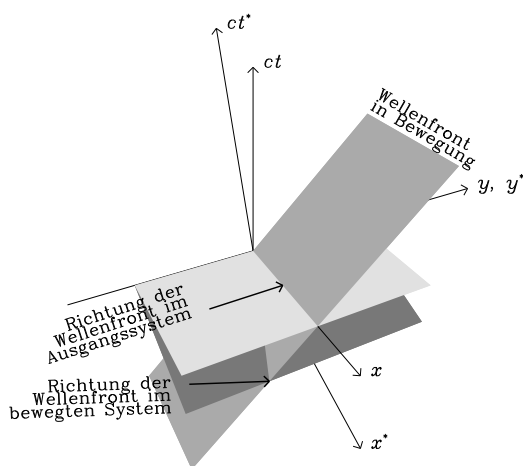


Abbildung 5.18: Aberration und Relativität der Gleichzeitigkeit. I.

Analog Abb. 2.12 zeichnen wir nun eine Wellenfront, die sich in  $y$ -Richtung ausbreitet. Dazu zeichnen wir die Ebenen gleichzeitig mit  $t = 0$  (hell) und mit  $t^* = 0$  (dunkel). Die Normale der Wellenfront ist eine Richtung im Raum und verändert sich bei Bewegung des Beobachters *nicht*, solange sich an der Gleichzeitigkeit nichts ändert. Die Ebenen  $t^* = 0$  und  $t = 0$  müssen verschieden sein, sonst gibt es keine Aberration der Phasenflächen.

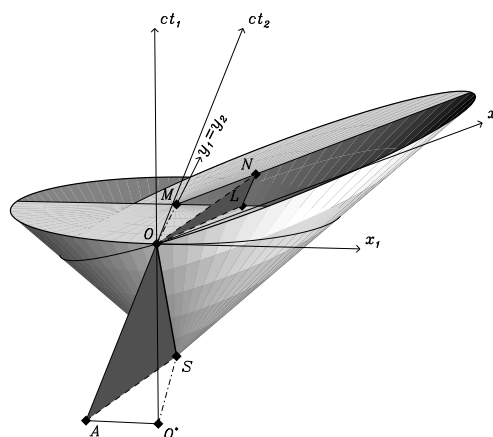


Abbildung 5.19: Aberration und Relativität der Gleichzeitigkeit. II.

Dies ist eine erweiterte Version von Abb. 4.3. Der Beobachter bestimmt die Richtung des ankommenden Photons [44]. Die Projektion des ziemlich komplexen Fahrplans auf die Räume gleichzeitiger Ereignisse liefert sowohl die Richtung des einfallenden Photons (Schnitt der Ebene  $OSO^*$  mit  $t_1 = 0$  und  $OSA$  mit  $t_1 = 0$  bzw.  $t_2 = 0$ ) als auch die Lage der Wellenfront (Schnitt des Lichtkegels mit  $t_1 = 0$  bzw.  $t_2 = 0$ ) zum Zeitpunkt der Beobachtung (siehe Text).

aber bewegt sich der Zaun. Die Abstände der Hindernisse erscheinen verkürzt und verhindern die Passage. Was ist nun richtig? Das hängt davon ab, in welchem Bezug die Parallelität festgestellt wird. Parallelität im Ruhsystem des Stabes heißt Auflaufen im Ruhsystem der Hindernisreihe. Obwohl der Stab dort verkürzt erscheint, kann er nicht passieren, weil er aus der Driftrichtung herausgedreht erscheint. Ist der Stab dagegen im Ruhsystem des Zaunes parallel, kann er passieren. In seinem Ruhsystem ist zwar die Hindernisreihe verengt, aber der Zaun scheint *in* die Driftrichtung gedreht, und der Stab kann durchtauchen.

Die mit der Relativität der Gleichzeitigkeit verknüpfte Änderung der Orientierung erweist sich auch als notwendige Voraussetzung für die Aberration (Abb. 4.3) im Wellenbild [88]. Solange wir das Recht haben, uns einen Strom von Teilchen oder teilchenartigen Objekten wie *Wellengruppen* vorzustellen, können wir das Additionstheorem der Geschwindigkeiten zur Bestimmung der Aberration heranziehen. Beobachten wir dagegen Wellenfronten (wie dies mit einer adaptiven Optik geschieht),

gibt es dafür keinen Grund (Abb. 5.18). Würden wir Schall mit einer Einrichtung beobachten, die es ermöglicht, die Richtung der Wellenfronten festzustellen, fänden wir keine Aberration<sup>14</sup>. Wie ist es aber mit dem Licht, das ja wirklich Aberration zeigt, auch wenn wir es (mit gutem Grund) als Welle verstehen? Hier ist es die Relativität der Gleichzeitigkeit, die zur bekannten Aberration führt (Abb. 5.18). Die Wellenfront schneidet die Ebene  $t = 0$  auf einer Linie, das Momentanbild der Wellenfront. Ihre räumliche Normale hat die Richtung der  $y$ -Achse. Bewegt sich der Beobachter in  $x$ -Richtung, ist der Schnitt nun mit der Ebene  $t^* = 0$  wieder eine Gerade, deren Normale in der Ebene  $ct^* = 0$  jetzt aber eine Komponente in  $x$ -Richtung hat. Das ist die Aberration. Die Momentaufnahme in den beiden Bezugssystemen unterscheiden sich, weil die Definition des Moments vom Bezugssystem abhängt. Abbildung 5.19 ist die Fahrplanversion von Abbildung 4.3. Der Beobachter bewertet zum Zeitpunkt  $O$  die räumliche Richtung des längs der Mantellinie  $SO$  des Lichtkegels einfallenden Photons als Projektion dieser Linie auf einen Raum gleichzeitiger Ereignisse [44]. Für den Beobachter  $B_1$  ist  $MO$  die Projektion von  $SO$ . Sie ergibt sich als Schnitt der Ebene gleichzeitiger Ereignisse mit der Ebene  $SOO^*$ . Für  $B_2$  muß mit  $SOA$  geschnitten werden, und es ergibt sich die Aberration wie im Grundriß zu sehen. Solange wir jedoch die Definition der Gleichzeitigkeit unangetastet lassen, bleibt die Wellenfront ein Kreis, dessen Normalen weiter nach  $M$  zeigen. Wir müssen eine Relativität der Gleichzeitigkeit akzeptieren, wenn auch diese Normalen Aberration zeigen sollen. Gehen wir wie bekannt vor, erhalten wir für  $B_2$  eine neue Ebene gleichzeitiger Ereignisse und die Projektion  $NO$ . Der Punkt  $N$  ist der Mittelpunkt der Schnittfigur mit dem Lichtkegel. Mit der geeigneten (Minkowski-)Eichung der Koordinaten ist die Schnittfigur wieder ein Kreis, die Normalen zeigen alle nach  $N$ , und die Aberration der Normalen ist mit der des Teilchenbildes identisch.

Es zeigt sich, daß es gerade in der Minkowski-Geometrie – soweit die Kinematik betroffen ist – möglich ist, die Lichtausbreitung sowohl als Strom von Teilchen (Photonen) als auch als Wellenphänomen anzusehen. Weil nun die Relativität der Gleichzeitigkeit der zentrale Punkt ist, kann man das Argument sogar umkehren. Wir können von der Beobachtung einer teilchenartigen Aberration ausgehen und eine Relativität der Gleichzeitigkeit suchen, die diese Aberration für Wellenfronten reproduziert. Dann erhalten wir die Minkowski-Geometrie<sup>15</sup> [3].

---

<sup>14</sup>Fresnel, der die absolute Gleichzeitigkeit nicht in Frage stellen konnte, war sehr verwundert, als er merkte, daß Wellenfronten keine Aberration zeigen. Er berief sich deshalb auf die Arbeitsweise konservativer Teleskope. Diese schneiden mit der Aperturblende eine Wellengruppe aus der Front heraus, die sich dann durch das Teleskop bewegt und Aberration zeigt, obwohl der Wellenfront vor der Aperturblende diese fehlt. Allerdings muß man dann einen Äther in Kauf nehmen, dessen Bewegung *nicht* abgeschirmt werden kann, und der alle Materie ungehindert und ungebremst durchdringt.

<sup>15</sup>Wir betonen nochmals, daß die Aberration der Phasenflächen ein Effekt erster Ordnung ist. Er läßt sich deshalb *nicht* wie das Nullergebnis des Michelson-Versuchs durch Konstruktionen modellieren, die an der absoluten Gleichzeitigkeit festhalten.

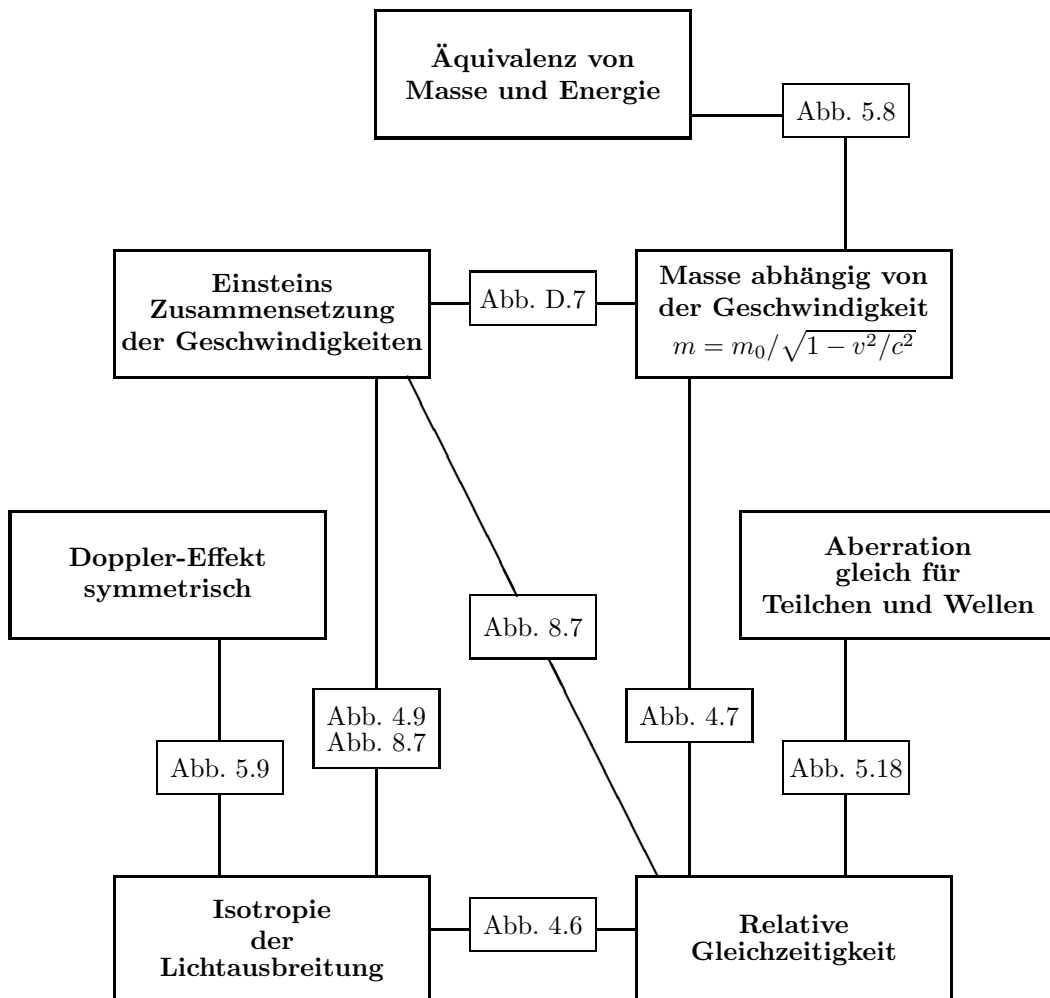
## 5.4 Das Netz

An diesem Punkt können wir nun feststellen, daß wir ein ganzes Netz von Aussagen haben, die alle der Minkowski-Geometrie äquivalent sind, wenn man das Relativitätsprinzip anerkennt. Zunächst hatten wir die Minkowski-Geometrie aus der Isotropie der Lichtgeschwindigkeit abgeleitet. Unsere erste Beobachtung war die Relativität der Gleichzeitigkeit. Mit den entsprechenden genauen Koeffizienten stellt sie den essentiellen Teil der Lorentz-Gruppe dar: Eine Bewegungsgruppe, die solch eine Relativität der Gleichzeitigkeit einschließt, kann nur die Lorentz-Gruppe sein. Danach leiteten wir die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse ab und fanden, daß umgekehrt die Relativität der Gleichzeitigkeit aus dieser Geschwindigkeitsabhängigkeit konstruiert werden kann. Wir haben gezeigt, daß die Formel  $E = mc^2$  folgt, aber mit dem gleichen Erfolg können wir aus dieser die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse herleiten, etwa mittels der Definition des Energiezuwachses in Gleichung (5.3) und deren Integration zur Gleichung (5.4). Andererseits können wir auch mit dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeiten beginnen, das die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit unmittelbar zeigt, aber auch die Relativität der Gleichzeitigkeit (Kapitel 8, Abb. 8.7). Bondi [17] beginnt die Diskussion mit der Symmetrie des Doppler-Effekts. Schließlich können wir verlangen, daß die Aberration des Lichts für Wellenfronten und Photonen gleich ist. Das impliziert ebenfalls die bekannte Relativität der Gleichzeitigkeit. Das so entstehende Netz ist in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

## 5.5 Schneller als das Licht

Gibt es Bewegung schneller als das Licht? Fragen wir die Geometrie. Wir haben diese mit Spiegelungen erzeugt. Die Weltlinie eines ruhenden Teilchens kann nur kongruent (d.h. Spiegelbild) einer zeitartigen Linie sein, die Bewegung mit einer Geschwindigkeit kleiner als der Lichtgeschwindigkeit beschreibt. Oft verweist man auf die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse und argumentiert, die Lichtgeschwindigkeit könne nicht erreicht werden, weil auch große und langandauernde Beschleunigungen am Ende immer nur die Energie (und mit ihr die Masse) erhöhen, die Weltlinie aber immer zeitartig bleibt. Ein Körper in Ruhe kann auch bei Zufuhr beliebiger Energie die Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen: Die Länge seines Impulsvektors kann sich ja nicht ändern und fixiert die Geschwindigkeit auf  $v < c$ . Dennoch gibt es lichtschnelle Teilchen, die Photonen, die nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden, sondern schon bei ihrer Entstehung Lichtgeschwindigkeit haben. Ein lichtschnelles Teilchen hat einen Impuls der Länge Null, d.h., es hat keine *Ruhmasse*  $m_0$ . Dennoch hat es eine Masse, die sich bei Stößen mit anderen Teilchen bemerkbar macht. Nur zur Ruhe kann es nicht gebracht werden, ebensowenig wie es beschleunigt werden

Tabelle 5.1: Das Netz der Grundaussagen der Relativitätstheorie



kann<sup>16</sup>. Die Länge Null des Impulsvektors bindet die Bewegung des Teilchens an den Lichtkegel. Auch diese Richtungen in der Raum-Zeit können bei Spiegelungen nicht umgekehrt werden. Die Fixierung der Geschwindigkeit von realen Bewegungen auf  $v \leq c$  sichert eine *Kausalordnung* in der Welt – alle Wirkung wird nur in einer

<sup>16</sup>Merkwürdigerweise kann man grundsätzlich auch ein Photon auf eine Waage legen, obwohl es dabei nicht zur Ruhe gebracht werden kann. Eingesperrt in einen Kasten mit ideal spiegelnden Wänden bewirkt sein Gewicht, daß die Stöße gegen den Boden etwas mehr Impuls übertragen als die Stöße gegen den Deckel. Die Differenz, die sich pro Zeiteinheit ansammelt, ist das Gewicht des Teilchens. Dies war eins der Argumente, mit denen sich Einstein für das Äquivalenzprinzip als Grundlage der Gravitationstheorie entschied.

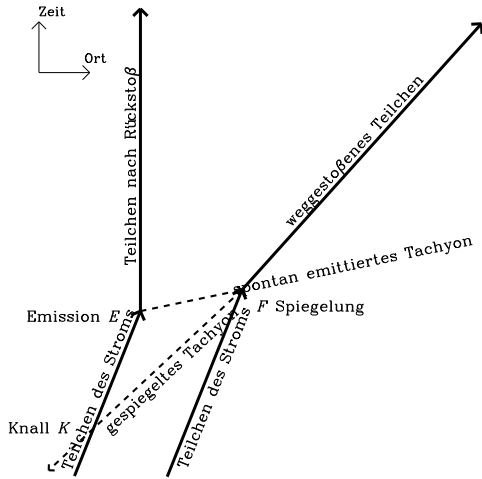


Abbildung 5.20: Spiegelung von Tachyonen in die Vergangenheit

In einem Strom von Teilchen fester Ruhmasse werde ein Tachyon gegebenen Impulsquadrats spontan emittiert und von einem anderen Teilchen des Stroms elastisch reflektiert. Dann trifft es das Teilchen, dem es seine Emission verdankt, vor der Emission.

Die Tachyonenrichtungen im Fahrplan sind durch die Konstanz der Impulsquadrate der Tachyonen und der Teilchen des Stroms bestimmt (Abb. 5.21). Zur Konstruktion dieser Richtungen ergänzen wir die Abbildung mit Hilfslinien zur Impulsbilanz und den Massenschalen der beteiligten Teilchen.

Zeitrichtung vermittelt.

Die Spiegelungsvorschrift *allein* verbietet aber Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit zunächst *nicht*, so wie sie auch Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit nicht unterbindet. Es bleibt, andere Argumente zur möglichen Existenz überlichtschneller Teilchen zu finden. Voraussetzung bleibt nur, daß diese die Relativität nicht stören. – Überlichtschnelle Teilchen nennt man *Tachyonen* [43]. Ihr Ruhmassenquadrat muß negativ angesetzt werden, ihre Ruhmasse also imaginär. Auch Tachyonen können nicht zur Ruhe gebremst werden, weil das negative Ruhmassenquadrat den Impulsvektor ins Äußere des Lichtkegels verbannt. Tachyonen müssen bereits zum Zeitpunkt ihrer Bildung Überlichtgeschwindigkeit haben.

Drei wichtige Argumente sprechen gegen die Existenz von Tachyonen. Zum ersten ist die Zeitkomponente eines raumartigen Impulsvektors nicht nach unten begrenzt.

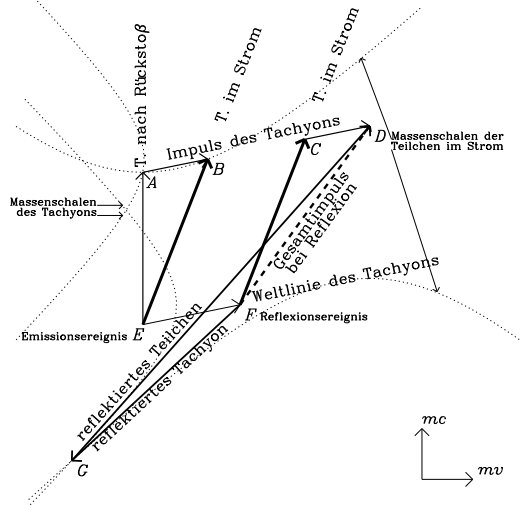


Abbildung 5.21: Impulsbilanz der Tachyonenspiegelung.

Der Impulsvektor  $\vec{EB}$  wird in den Impulsvektor  $\vec{AB}$  des Tachyons (der auf der raumartigen Massenschale des Tachyons liegen muß) und den Impulsvektor  $\vec{EA}$  zerlegt (der auf der gleichen Massenschale wie  $\vec{EB}$  endet. Wir finden A als Schnittpunkt zweier Hyperbeln.

Zur Reflexion konstruieren wir zunächst den Gesamtimpuls  $\vec{FD}$  als Summe von  $\vec{FC} = \vec{EB}$  und  $\vec{CD} = \vec{AB}$ . Dieser wird wieder wie gehabt zerlegt in einen Tachyonenimpuls  $\vec{FG}$  und einen Teilchenimpuls  $\vec{GD}$ . Der Punkt G ist wie Punkt A der Schnitt zweier Hyperbeln, deren Zentrum nun F bzw. D ist.

Diese Komponente ist aber, wie wir wissen, die Gesamtenergie des Tachyons. Die Energie eines Tachyons kann also beliebig negative Werte annehmen. Stellen wir keine relativitätsbrechenden Nebenbedingungen, kann ein Tachyon dann auch beliebig viel Energie freisetzen. In einer Bilanz über normale Teilchen würde sich das als *spontane Energieerzeugung* bemerkbar machen: Nie ist dies in einem Experiment nachweisbar aufgetreten. Zum zweiten könnte sich ein Teilchen in Ruhe durch spontane Emission eines Tachyons negativer Energie in Bewegung setzen. Das ist bei der Emission eines Photons oder unterlichtschneller Teilchen nicht möglich: Da muß sich die Ruhmasse des Emitters bei Emission ändern. Im Grundzustand, in dem der Emitter keine Energie mehr abgeben kann, kann er keine Photonen spontan emittieren und keinen Rückstoß erfahren. Im Gegensatz dazu ändert die spontane Emission eines Tachyons nicht notwendigerweise die Ruhmasse des Emitters, ja kann sie sogar noch erhöhen. Sie ist also auch im Grundzustand des Emitters möglich. Man sollte sich also wundern, wieso überhaupt das *erste Newtonsche Axiom* der Mechanik haltbar ist, wenn es Tachyonen gibt. Schließlich können Spiegelungen einen raumartigen Vektor völlig umkehren. Ein im Teilchenstrom spontan emittiertes und elastisch gestreutes Tachyon kann *vor* der Emission wieder auf das emittierende Teilchen treffen (Abb. 5.20,5.21). Ein Limerick [30] stellt es so dar:

There was a Young Lady named Bright  
 Whose speed was much faster than light.  
 She started one day in a relative way  
 and returned by the previous night.

Die *kausale Ordnung* der Ereignisse scheint aufgehoben. Wir beobachten aber keine spontane Emission im Grundzustand, keine Störung des ersten Newtonschen Axioms und keine Störung der kausalen Ordnung. Es bedarf erheblicher geistiger Klimmzüge, sich um diese drei Argumente herumzumogeln. Im makroskopischen Experiment gibt es keine Tachyonen.