

## Kapitel 8

# Die projektive Wurzel

Warum sind die eben betrachteten Geometrien alle so ähnlich? Sie haben eine gemeinsame Wurzel, die Geometrie der Perspektive, die *projektive Geometrie*. Euklidische und Minkowski-Geometrie, elliptische, hyperbolische und deSitter-Geometrie gehören zu *einer* Familie der metrisch-projektiven Geometrien. Deshalb widmen wir dieses Kapitel der projektiven Geometrie. Was den formalen Aspekt betrifft, wird wieder auf den Anhang verwiesen. Wir wollen hier die Einsichten gewinnen, die uns den einheitlichen Blick auf die Geometrien der Ebene gestatten.

Die Gesetze der Perspektive wurden von Brunelleschi 1425 demonstriert (Abb. 8.1). Die hellenistische Mathematik kannte sie bereits (Euklids Buch über die Optik [110]). Sie hatten sich aber aus dem Bewußtsein verloren, so daß diese Demonstration einen besonderen Einschnitt in der Kunst markiert. Stellen wir uns zunächst die euklidische Ebene – unseren Zeichentisch – vor, auf den wir schräg blicken, und den wir dadurch schief auf die Gesichtsfeldebene als neue Zeichenebene projizieren (Abb. 8.2, 8.3). Wir erhalten ein perspektivisches<sup>1</sup> Bild des Tisches. Das Unendliche der ursprünglichen Zeichenebene erscheint in der Gesichtsfeldebene als reelle Gerade im Endlichen, als *Horizont*, genauer als Bild der *Ferngeraden*. Wir holen also das Unendliche durch Projektion in die Zeichenebene und behandeln die Punkte des Unendlichen wie gewöhnliche Punkte. Was auf diese Weise aus der Zeichnung zum Satz des Pythagoras wird, zeigt Abbildung 8.3. Geraden, die in der Ausgangsebene parallel sind, schneiden sich sichtbar auf dem Bild der Ferngeraden. Wir sagen, daß sie einen gemeinsamen Fernpunkt haben. Aber auch die Lote auf solchen Geraden sind parallel und haben einen gemeinsamen Fernpunkt. Wir nennen ihn Pol der Geraden. Das ist ein wichtiger Tatbestand. Auch wenn später der Begriff Fernpunkt aufgelöst wird, es bleibt bestehen, daß sich die Lote auf einer Geraden in einem Punkt schneiden, dem Pol der Geraden.

---

<sup>1</sup>Wir nennen eine Abbildung *perspektiv*, wenn sie als Projektion aus einem Zentrum dargestellt werden kann. Perspektivische Abbildungen bilden keine Gruppe: Führen wir zwei perspektivische Abbildungen mit verschiedenen Zentren hintereinander aus, entsteht eine allgemeine *projektive* Abbildung, die nicht mehr perspektivisch ist. Die projektiven Abbildungen dagegen bilden eine Gruppe.

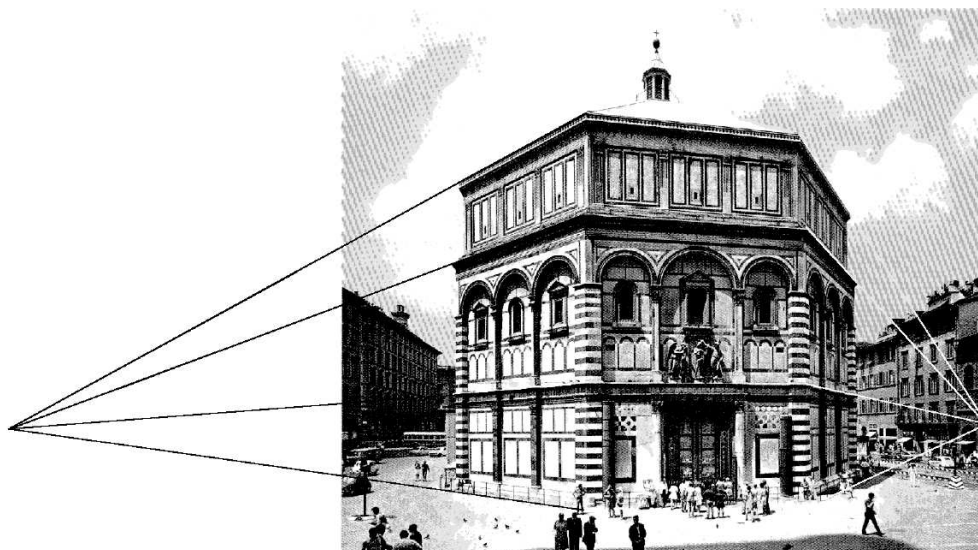


Abbildung 8.1: Die perspektive Abbildung. I.

Die Gesetze der Perspektive (speziell die Existenz der Fluchtpunkte) wurden in der Zeit zwischen Giotto di Bondone und Filippo Brunelleschi [26, 65] gefunden (vielleicht nur wiedergefunden [110]). 1425 demonstrierte Brunelleschi diese Gesetze mit Zeichnungen der Taufkirche von Florenz, die hier zusammen mit zwei Fluchtpunkten dargestellt ist.

In der projektiven Geometrie bleiben die *Inzidenz* von Punkten und Geraden, die *Kollinearität* von Punktetripeln (Abb. 8.4) und das *Doppelverhältnis* (Abb. 8.5) von Punktequadrupeln einer geraden Punktreihe (bzw. von vier Strahlen eines Strahlbüschels) immer noch unverändert, während Winkel und Längen ihre elementare Vergleichbarkeit verlieren. Kreise werden zu allgemeinen Kegelschnitten (Abb. 8.6). Alle Sätze, welche die Kollinearität dreier Punkte, die Existenz eines gemeinsamen Trägerpunktes für drei Geraden oder Trenneigenschaften (genauer das Doppelverhältnis) betreffen, bleiben erhalten, auch wenn sich die Begriffe Winkel und Längen auflösen.

Die projektive Geometrie erklärt zwei Figuren für gleich, wenn sie sich nur aufeinander (im allgemeinen in mehreren Schritten) projizieren lassen. In ihrem Rahmen sind alle Vierecke (wo keine drei Ecken auf einer Geraden liegen) untereinander kongruent, ebenso alle Vierseite (wenn keine drei Seiten durch einen Punkt gehen). Alle reellen nicht ausgearteten Kegelschnitte haben dieselbe Gestalt. In der projektiven Geometrie gibt es deshalb zunächst nicht die Möglichkeit, einen Kreis absolut zu definieren. Mit den Mitteln der projektiven Geometrie allein können wir nicht einmal entscheiden, ob ein Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist. Auch ist kein Kegelschnitt durch die Vorgabe dreier Punkte allein bestimmbar, wie das

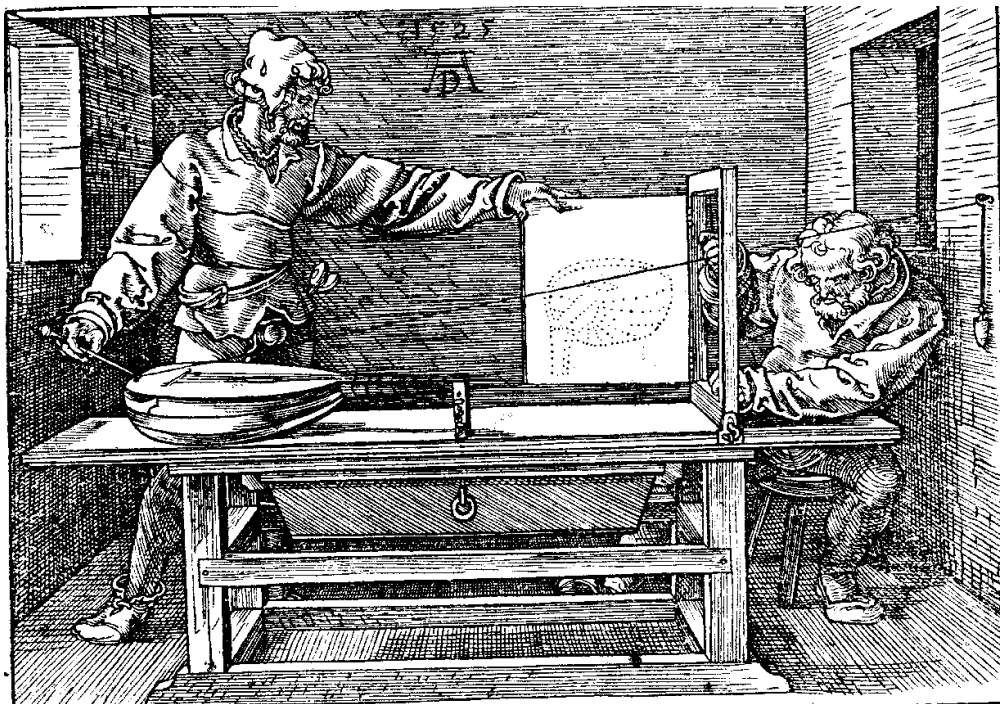


Abbildung 8.2: Die perspektive Abbildung. II.

Die Abbildung zeigt die von A.Dürer ([33], Bibliothek der ehem. kgl. preuss. Sternwarte Berlin) vorgeschlagene mechanische Konstruktion der Perspektive. Perspektivitätszentrum ist die Öse in der Wand. Die Koordinaten der Schnittpunkte der Projektionsstrahlen mit der Zeichenebene – dem Rahmen – werden von der Person rechts im Bild festgestellt und auf dem herausklappbaren Zeichenblatt eingetragen. So entsteht eine punktweise Konstruktion des perspektiven Bildes.

beim Kreis in der metrischen Geometrie der Fall ist. Ellipse und Hyperbel scheiden sich erst, wenn das Unendliche entschieden ist. Ellipsen sind dann die Kegelschnitte ohne Punkte im Unendlichen. Der Kreis ist erst dann als besondere Ellipse definiert, wenn die Länge festliegt und Strecken auf verschiedenen Geraden verglichen werden können. Allgemein ist ein Kegelschnitt erst durch fünf Punkte bestimmt (Abb. C.6). Die Eigenschaft, Kreis zu sein, bedarf also des Bezugs auf ein vordefiniertes Gebilde. Es zeigt sich, daß dieses Bezugsobjekt im einfachsten Falle selbst ein Kegelschnitt ist, den wir eben bei projektiven Transformationen festhalten wollen und folglich *absoluten Kegelschnitt* nennen. Jeder Kegelschnitt kann dazu ernannt werden, auch entartete oder imaginäre (d.h. solche, deren Gleichung zwar reell ist, aber keine reellen Lösungen hat.). Projektiv sind sie alle kongruent, so sie nicht entartet sind. Kreise werden nun relativ zu diesem absoluten Kegelschnitt definierbar, weil das Festhalten

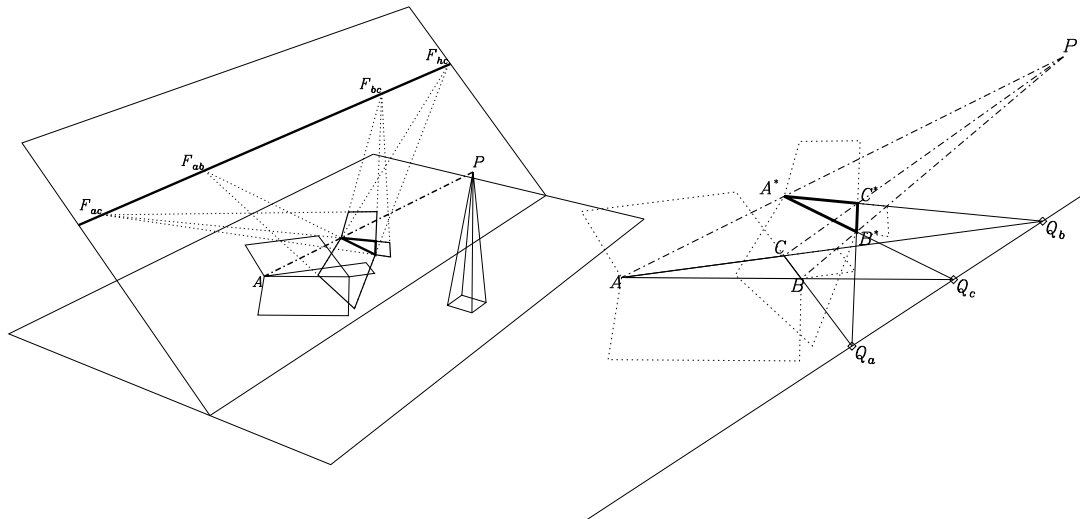


Abbildung 8.3: Die perspektive Abbildung. III.

Die Ebene mit der Pythagoras-Figur wird von einem erhöhten Punkt  $P$  aus auf eine neue (Gesichtsfeld-)Ebene projiziert. Das Unendliche der Ebene wird zum Horizont, d.h. zu einer reellen Geraden im Endlichen. Parallele Geraden schneiden sich auf diesem Horizont. Aufeinander lotrechte Geraden definieren Punktepaare  $((F_{ac}, F_{bc})$  und  $(F_{ab}, F_{hc})$ ) auf dem Horizont. Diese Punktepaare definieren eine Abbildung des Horizonts auf sich selbst, die wir als Involution bezeichnen, weil die wiederholte Abbildung in die Ausgangspunkte zurückführt.

Einander entsprechende Seiten zweier Dreiecke in perspektiver Lage schneiden sich auf der Schnittlinie der beiden Ebenen.

an ihm eben nicht mehr alle projektiven Transformationen gestattet, sondern nur noch diejenigen, die ihn selbst unverändert lassen. Diese reduzierte Beweglichkeit ist nun genau die einer ebenen metrischen Geometrie: Wenn wir von einem Punkt und von einer Richtung an diesem Punkt das Bild kennen, ist die Bewegung der Ebene bis auf eine Spiegelung an eben dieser Richtung bestimmt. Das werden wir alles noch im einzelnen sehen.

Im Wechselspiel der projektiven Eigenschaften ist das Doppelverhältnis (Abb. 8.5) von vier Punkten einer geraden Punktreihe oder von vier Geraden eines Strahlbüschels das zentrale Maß. Schon Pappos fand, daß das Doppelverhältnis durch perspektive Abbildung von Gerade zu Gerade übertragen werden kann. Wir

Abbildung 8.4: Desargues' Theorem

Liegen zwei Dreiecke zueinander perspektiv, d.h., schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem Punkt  $P$ , dann schneiden sich die entsprechenden Geraden auf einer Linie.

Wir haben einen Teil der nebenstehenden Figur vergrößert. Die angesprochene Linie der Schnittpunkte ist der Schnitt der Ausgangsebene mit der Gesichtsfeldebene. Unsere neue Figur ist aber eben, und der Bezug zur vorigen Zeichnung dient nur der Veranschaulichung der Gültigkeit des Theorems. Zieht man die dritte Dimension nicht heran, hat Desargues' Theorem den Charakter eines Axioms.

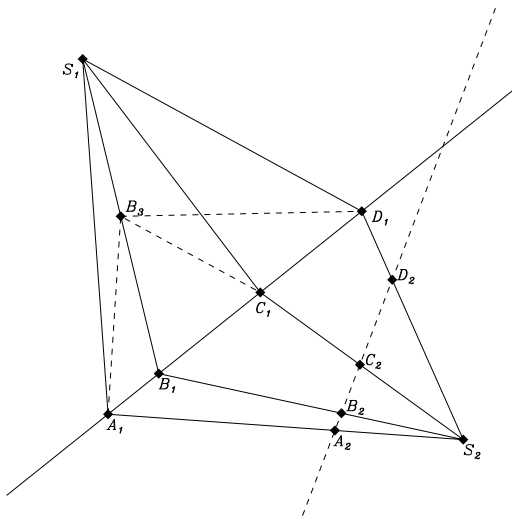


Abbildung 8.5: Das Doppelverhältnis

Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ist das Doppelverhältnis von vier Flächen, die diese Gerade mit irgendeinem Strahlbüschel bildet. Das Doppelverhältnis der Flächen hängt aber nicht von den Punkten ab, die wir auf den Strahlen auswählen: Diese bestimmen nur die Länge der Schenkel in Dreiecken mit festem Winkel. Deren Flächen sind dann den Schenkellängen proportional, so daß sich alle Schenkellängen im Doppelverhältnis herauskürzen. Das Doppelverhältnis ist also sowohl Eigenschaft der Punktreihe als auch des von ihr indizierten Strahlbüschels. Damit bleibt es bei Übertragung zwischen Strahlbüscheln und geraden Punktfolgen, allgemein also bei projektiven Abbildungen, erhalten.

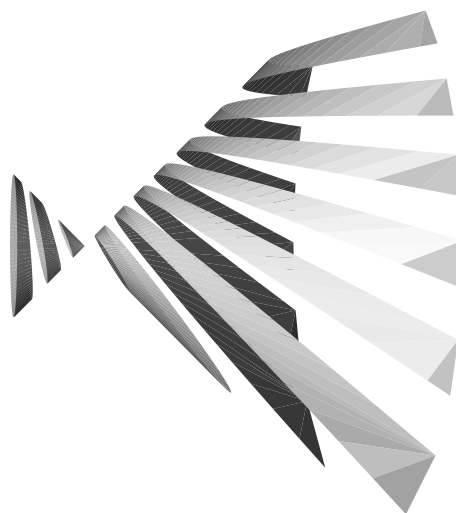


Abbildung 8.6: Kegelschnitte

Der ebene Schnitt eines Kegel kann eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein, je nachdem, ob die schneidende Ebene nur einen Teil des Doppelkegels schneidet, parallel zu einer Mantellinie ist oder beide Teile des Doppelkegels schneidet. Der Schnitt links außen ist ein Kreis, der aus der Kegelspitze auf die anderen Schnittebenen projiziert wird und dort Ellipsen, eine Parabel und Hyperbeln herauschneidet. Die Mantellinien des Kegels sind dabei die Projektionsstrahlen.

können es vorläufig als als doppeltes Teilverhältnis von Abständen ansehen, obwohl Abstände ja eigentlich nicht definiert sein müssen. So setzt eine rein projektive Definition der Doppelverhältnisse bei der harmonischen Teilung an, wie wir gleich sehen werden. Wenn wir in der euklidischen Ebene das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden berechnen wollen, können wir

$$\mathcal{D}[A, B; C, D] = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} \quad (8.1)$$

ansetzen. Beim Doppelverhältnis von vier Punkten ist die Reihenfolge der Punkte zu beachten. Wird diese nämlich geändert, wandelt sich der Wert des Doppelverhält-

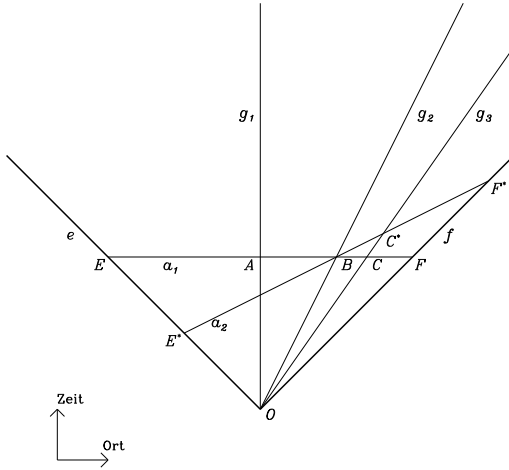


Abbildung 8.7: Einsteins Zusammensetzung der Geschwindigkeiten. II.

Wir zeichnen die Weltlinien  $g_i$  dreier gleichförmig bewegter Objekte und die lichtartigen Richtungen  $e$  und  $f$  durch ein Ereignis  $O$ . Die in  $B$  errichteten Senkrechten auf  $g_1$  und  $g_2$  sind  $a_1$  und  $a_2$ . So finden wir die Punkte  $A$ ,  $C$  und  $C^*$ . Die Kettenregel der Doppelverhältnisse ergibt

$\mathcal{D}[g_2, g_1; e, f] \cdot \mathcal{D}[g_3, g_2; e, f] = \mathcal{D}[g_3, g_1; e, f]$ . Das ist das Additionstheorem der Geschwindigkeiten. So ist u.a.  $v_{21}/c = AB/OA$  und  $\mathcal{D}[g_2, g_1; e, f] = (c + v_{21})/(c - v_{21})$ .

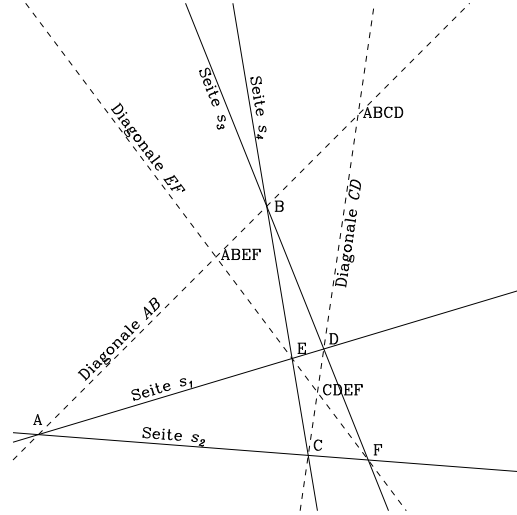


Abbildung 8.8: Der harmonische Wurf

Im vollständigen Vierseit schneiden sich die Seiten in sechs Punkten  $A, B, C, D, E, F$ . Es gibt drei Diagonalen  $AB, CD, EF$  und drei Diagonalpunkte  $ABCD, ABEF, CDEF$ . Eine Diagonale (z.B.  $AB$ ) kann aus zwei verschiedenen Punkten (etwa  $E$  und  $F$ ) auf eine andere (hier  $CD$ ) projiziert werden. Die Ergebnisse der beiden Abbildungen unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge eines Punktepaars. Die Doppelverhältnisse müssen deshalb sowohl gleich als auch reziprok sein: sie sind gleich  $-1$ .

Das vollständige Vierseit ist die Standardkonstruktion, um den vierten harmonischen Punkt zu drei kollinearen Punkten oder den vierten harmonischen Strahl zu drei Strahlen eines Büschels zu finden.

nisses, allerdings nur in einem bestimmten Schema. Es ergibt sich nämlich

$$\mathcal{D}[B, A; C, D] = \mathcal{D}[A, B; D, C] = \frac{1}{\mathcal{D}[A, B; C, D]}, \quad (8.2)$$

$$\mathcal{D}[A, C; B, D] = 1 - \mathcal{D}[A, B; C, D], \quad \mathcal{D}[C, D; A, B] = \mathcal{D}[A, B; C, D] \quad (8.3)$$

und schließlich die Kettenregel

$$\mathcal{D}[A, C; E, F] = \mathcal{D}[A, B; E, F] \mathcal{D}[B, C; E, F]. \quad (8.4)$$

Eine in unserem Zusammenhang einfache Anwendung der Kettenregel ist die Ableitung der Einsteinschen Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (Abb. 8.7). Zu

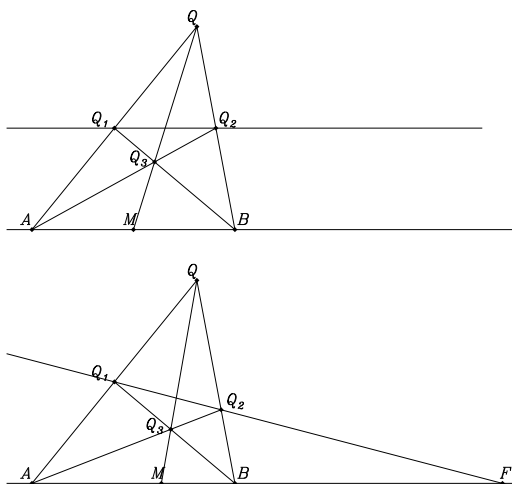


Abbildung 8.9: Metrische und harmonische Teilung

Die metrische Teilung kann als harmonische Teilung dargestellt werden, weil der unendlich ferne Punkt der Geraden in die projektive Betrachtung einbezogen werden kann. Die euklidische Teilung in der oberen Hälfte nimmt die Parallele zur Strecke  $AB$  zu Hilfe. Projektiv bedeutet das, den Fernpunkt  $F$  der durch  $A$  und  $B$  laufenden Geraden auszuzeichnen und festzuhalten und mit ihm die metrische Teilung projektiv zu konstruieren. In der unteren Hälfte ist dieses projektive Bild dargestellt.

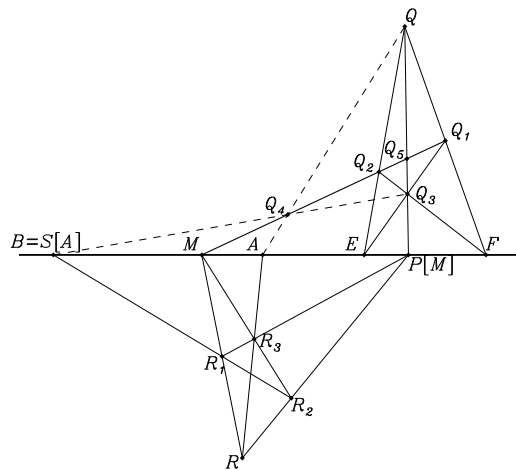


Abbildung 8.10: Die Übertragung einer Strecke

Wir konstruieren nun zunächst etwas komplizierter – dafür allgemeiner – die gleiche Verlängerung wie in Abbildung 8.11. Wir suchen also einen Punkt  $B = S[A]$ , dessen Doppelverhältnis  $\mathcal{D}[B, M; E, F] = \mathcal{D}[M, A; E, F]$  ist. Dazu bestimmen wir  $P[M]$  als vierten Punkt eines harmonischen Wurfs  $[M, P[M]; E, F]$ . Der Punkt  $S[A]$  gehört nun wiederum zu einem harmonischen Wurf, nämlich  $[S[A], A; M, P[M]]$ . Diese Konstruktion finden wir später im Zweidimensionalen wieder (Abb. 8.16).

einem Ereignis in der Minkowski-Ebene zeichnen wir die lichtartigen Richtungen  $e$  und  $f$  und drei gleichförmige Bewegungen  $g_i$ . Die raumartige Linie  $a_1$  soll orthogonal zu  $g_1$  sein. Ersichtlich bestimmen die Geschwindigkeiten  $v_{21}/c = AB/OA$  und  $v_{31}/c = AC/OA$  die Doppelverhältnisse  $\mathcal{D}[g_2, g_1; e, f] = (c + v_{21})/(c - v_{21})$  und  $\mathcal{D}[g_3, g_1; e, f] = (c + v_{31})/(c - v_{31})$ . Nun ist es wichtig, daß wir uns an die Relativität der Gleichzeitigkeit erinnern. Der Ort der zu  $B$  im Ruhssystem von  $g_2$  gleichzeitigen Ereignisse ist die in  $B$  errichtete Senkrechte  $a_2$ . Wir erhalten so  $v_{32}/c = BC^*/OB$  und  $\mathcal{D}[g_3, g_2; e, f] = (c + v_{32})/(c - v_{32})$ . Die Kettenregel

$$\mathcal{D}[g_3, g_2; e, f] \cdot \mathcal{D}[g_2, g_1; e, f] = \mathcal{D}[g_3, g_1; e, f]$$

ergibt nun unmittelbar das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten (4.1). Wenn wir umgekehrt mit diesem beginnen, bestimmen wir  $v_{32}$  aus den Doppelverhältnissen. Dann sehen wir, daß, um die Größe  $v_{32}$  als Streckenverhältnis zu

interpretieren, wir die Relativität der Gleichzeitigkeit akzeptieren müssen, d.h.,  $a_2$  muß orthogonal zu  $g_2$  sein. Nur dann erhalten wir  $v_{32}/c = G_2G_4/OG_2$ .

Ersichtlich bleibt das Doppelverhältnis bei projektiven Abbildungen unverändert. Das Doppelverhältnis einer Punktreihe  $[A_1, B_1, C_1, D_1]$  ist auch Eigenschaft der Strahlen eines beliebigen Büschels ( $S_1$  oder  $S_2$  in Abb. 8.5), die durch die Punkte bestimmt werden. Schneiden wir solche vier Strahlen mit einer anderen Geraden, erhalten wir eine andere Punktreihe  $[A_2, B_2, C_2, D_2]$ , die aber immer wieder das gleiche Doppelverhältnis wie  $[A_1, B_1, C_1, D_1]$  haben muß, weil eben zwischen Büscheln und Punktreihen die Gleichheit besteht. Den nichttriviale Spezialfall bestimmt das Doppelverhältnis  $\mathcal{D}[A, B; C, D] = -1$ , den wir als *harmonische Lage* bezeichnen. Die gegenseitige Lage der Punktepaare  $[A, B]$  und  $[C, D]$  heißt dann *harmonische Teilung*. Die Abbildung 8.8 zeigt sie am vollständigen Vierseit mit seinen 6 Ecken und 3 Diagonalen. Die Abbildung demonstriert, daß die Konstruktion der harmonischen Teilung ohne explizite Berechnung des Doppelverhältnisses vonstatten geht. Dazu betrachten wir auf jeder Diagonalen die zwei Eckpunkte und die zwei Diagonalpunkte. Diese Punktreihen werden aus den anderen Eckpunkten aufeinander projiziert. So gibt es z.B. zwei Abbildungen der Diagonale  $AB$  auf  $CD$ , vermittelt durch die Perspektivitätszentren  $E$  und  $F$ . Auf der einen Seite ist nun  $\mathcal{D}[A, B; ABEF, ABCD] = \mathcal{D}[D, C; CDEF, ABCD]$ , auf der anderen  $\mathcal{D}[A, B; ABEF, ABCD] = \mathcal{D}[C, D; CDEF, ABCD]$ . Das Doppelverhältnis  $\mathcal{D}[C, D; CDEF, ABCD]$  ist also gleich seinem Inversen ( $\mathcal{D}[D, C; CDEF, ABCD]$ ). Es kann aber nicht 1 sein, also ist es  $-1$  wie auch alle entsprechenden Doppelverhältnisse auf den anderen Diagonalen.

Beginnend mit der harmonischen Teilung können wir nun alle anderen Doppelverhältnisse durch sukzessive Multiplikation und Inversion unter Berücksichtigung der Symmetrien (8.2) und der Kettenregel (8.4) bilden. Das ist der Grund, weshalb das Doppelverhältnis bestimmt werden kann, *ohne* auf die euklidische Ebene wie in Abb. 8.5 zurückgreifen zu müssen.

Immer noch ist es unser Ziel, mit projektiven Mitteln Orthogonalität zu definieren und Winkel und Strecken zu vergleichen. Wir gehen in drei Schritten vor. Erst einmal vergleichen wir Segmente einer gegebenen Geraden miteinander und zeigen, wie man Segmente teilen oder verdoppeln kann. Darauf übertragen wir die Methode auf die Winkel in einem Strahlbüschel. Schließlich bestimmen wir den Vergleich von Strecken und Winkeln auf verschiedenen Geraden bzw. Büscheln durch die Konstruktion der Spiegelung.

Als Fingerübung und Orientierung betrachten wir zunächst eine einzelne Gerade und orientieren uns an der ebenen Geometrie. Hier ist die Ferngerade ein absolutes Gebilde: Parallelen sind dadurch definiert, daß sie sich dort schneiden. Wenn wir auf einer Geraden  $g$  eine Strecke  $AB$  durch einen Punkt  $M$  halbieren, dann ist der Fernpunkt  $F[g]$  der Geraden der vierte harmonische Punkt (Abb. 8.9). Das ist in der euklidischen Geometrie evident, gilt also auch in der Projektion. Wir konstruieren daher die Teilung einer Strecke, indem wir den Punkt suchen, der zusammen mit



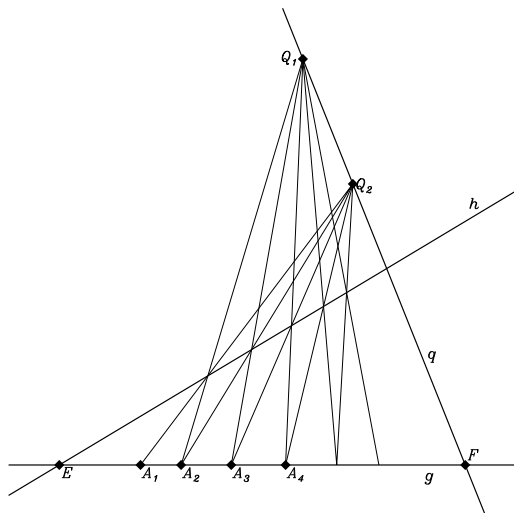


Abbildung 8.11: Längenvergleich bei zwei Fixpunkten

Wenn zwei absolute Punkte  $E$  und  $F$  auf einer Geraden gegeben sind, ist die Länge einer Strecke  $A_1A_2$  durch das Doppelverhältnis  $\mathcal{D}[A_1, A_2; E, F]$  bestimmt, das deren Endpunkte mit den beiden absoluten Punkten bilden. Auf einer Geraden seien  $E$  und  $F$  und eine Einheitsstrecke  $A_1A_2$  gegeben. Durch beide Fixpunkte legen wir eine Gerade ( $q$  und  $h$ ). Auf  $q$  wählen wir  $Q_1$  und ziehen die Verbindung von  $A_1$  mit dem Schnittpunkt von  $h$  und der Verbindung  $Q_1A_2$ . Den Schnittpunkt dieser Verbindung mit  $q$  bezeichnen wir mit  $Q_2$ . Wir verlängern die Strecke durch fortgesetzte Verbindung mit  $Q_1$  und  $Q_2$ . Wir sehen unmittelbar, daß  $\mathcal{D}[A_1, A_2; E, F] = \mathcal{D}[A_2, A_3; E, F] = \mathcal{D}[A_3, A_4; E, F] = \dots$

dem Fernpunkt die Strecke harmonisch teilt. Entsprechend tragen wir die Strecke  $AM$  an sich selbst ab, indem wir den Punkt  $B$  suchen, der zusammen mit  $A$  das Paar  $BF[g]$  harmonisch teilt. Wollen wir die Koordinaten so wählen, daß sie das Doppelverhältnis darstellen, können wir  $(A, M, F) = (0, 1, \infty)$  setzen. Dann entspricht dem Punkt  $B$  der Koordinatenwert 2. Die harmonische Teilung mit dem Fernpunkt liefert uns also (in der Minkowski-Geometrie, aber auch in der euklidischen und der Galilei-Geometrie) den Längenvergleich auf einer Geraden.

Wir können Abbildung 8.9 als Definition der Spiegelung auf der Geraden lesen:  $B$  ist der Spiegelpunkt  $S[A]$ , wenn  $M$  der Spiegel ist. Diese Spiegelung hat immer *zwei* Fixpunkte: neben  $M$  auch noch  $F[g]$ , der zunächst als Fernpunkt der Geraden

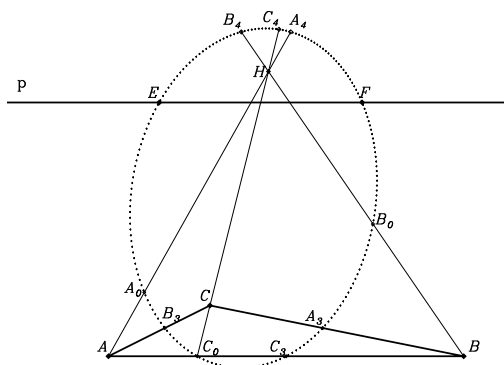


Abbildung 8.12: Der Feuerbach-Kreis in der projektiven Geometrie

Wir zeichnen ein vollständiges Viereck  $[A, B, C, H]$  und eine Gerade  $p$ . Wir teilen jede Seite harmonisch mit dem Schnittpunkt auf der Geraden  $p$ . So finden wir die Seitenmitten  $A_3, B_3, C_3$  und  $A_4, B_4, C_4$ . Durch diese sechs Punkte und durch die drei Diagonale  $A_0, B_0, C_0$  geht ein Kegelschnitt. Er schneidet die Gerade  $p$  in zwei Punkten  $E$  und  $F$ . Dies sind die Fixpunkte der Involution, die von den gegenüberliegenden Seitenpaaren des Vierecks auf  $p$  markiert wird.

angesehen werden kann. Lösen wir uns aber vom Bild der Projektion einer euklidischen Ebene, dann definieren wir eine Spiegelung auf einer Geraden um den Punkt  $M$  durch Angabe eines Paares einander entsprechender Punkte  $E$  und  $F$  (Abb. 8.10). Wir suchen also die Spiegelung als projektive Abbildung, die  $M$  als Fixpunkt hat und  $E$  und  $F$  aufeinander abbildet. Mit dem vollständigen Viereck finden wir den zweiten Fixpunkt, den wir nun  $P[M]$  nennen. Die Spiegelung bildet nun jeden Punkt  $A$  auf den vierten harmonischen Punkt ab. Die Zeichnung zeigt, wie der harmonische Wurf  $[Q, Q_3; Q_5, P[M]]$  aus  $Q_4$  auf  $[A, S[A]; M, P[M]]$  projiziert wird. Es gilt also  $\mathcal{D}[A, S[A]; M, P[M]] = \mathcal{D}[Q, Q_3; Q_5, P[M]] = -1$ .

Wenn wir an die Projektion der euklidischen Ebene denken, ist  $P[M]$  der Fernpunkt der Geraden  $g$  und deshalb für alle Punkte  $M$  auf  $g$  derselbe. Die rein projektive Konstruktion gibt dafür keinen Grund. Statt dessen können die Punkte  $P[M]$  irgendein projektives Bild der Punkte  $M$  sein. Die projektive Abbildung einer Geraden auf sich hat aber höchstens zwei reelle Fixpunkte, wie man auch an Abbildung 8.10 ablesen kann. Dann gibt es also zwei Punkte  $E$  und  $F$ , die bei Spiegelung an *jedem* Punkt der Geraden ineinander übergehen. Damit definieren nun  $E$  und  $F$  ihrerseits für alle Punkte  $M$  der Geraden einen *Pol*  $P[M]$  als vierten harmonischen Punkt. Die Abbildung  $M \rightarrow P[M]$  ist also selbst eine Involution auf der Geraden.

Die einfachste Konstruktion des Längenvergleichs geschieht über zwei hintereinandergeschaltete perspektive Abbildungen (Abb. 8.11). Zur künftigen Verallgemeinerung zeigen wir die Vervielfältigung mittels des harmonischen Wurfs. Wieder sollen zwei Punkte gegeben sein, deren Auszeichnung bei den erlaubten projektiven Transformationen nicht verloren geht. Abbildung 8.10 zeigt die Konstruktion. Das heißt, wir können Strecken längs der Geraden längentreu übertragen und somit vergleichen. Mit den Winkeln ist es nicht anders, wir müssen nur die dualen Konstruktionen herstellen. So wie wir Strecken auf einer geraden Punktreihe abtragen und miteinander vergleichen, können wir auch Winkel zwischen Geraden eines Strahlbüschels abtragen und miteinander vergleichen.

Nur als Beispiel zum Nachdenken zeigen wir eine projektive Verallgemeinerung des Feuerbach-Kreises. Wir wählen eine Gerade  $p$  als Bild der Ferngeraden, die ihrerseits die Pole aller anderen Geraden tragen soll. Durch die Pole der drei Seiten ziehen wir die Höhen und finden den Höhenschnittpunkt  $H$  und die drei Höhenfußpunkte  $A_0, B_0, C_0$ . Wir halbieren die drei Seiten und die drei Höhen des Dreiecks durch harmonische Teilung mit dem Fernpunkt der jeweiligen Seite und finden weitere sechs Punkte  $A_3, B_3, C_3, A_4, B_4, C_4$ . Durch diese neun Punkte geht ein Kegelschnitt (genauer, es ist ein Kreis der jeweiligen Geometrie, ein gewöhnlicher Kreis in der euklidischen Geometrie (Abb. 6.9), eine gewöhnliche Hyperbel in der Minkowski-Geometrie (Abb. 6.10) und eine Parabel in der Galilei-Geometrie). Hat auf der Ferngeraden die Zuordnung der Pole zu den Fernpunkten reelle Fixpunkte, dann geht der Kegelschnitt auch durch diese, weshalb der Kegelschnitt auch *Elfpunktekegelschnitt* des Vierecks  $ABCH$  und der Geraden  $p$  heißt.

Was geschieht nun mit dem *Maß* der Winkel und Strecken, wenn sie durch Pro-

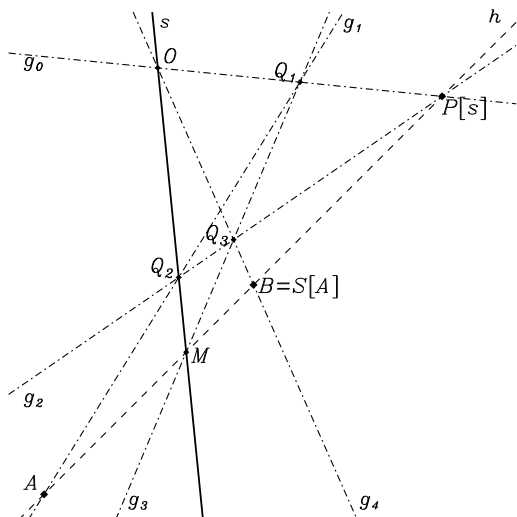


Abbildung 8.13: Spiegelung an einer Geraden. I.

Ist der Pol  $P[s]$  einer Geraden  $s$  gegeben, ziehen wir die Verbindung zu  $A$ , finden den Schnitt  $M$  und konstruieren auf der Verbindung  $h$  das Bild  $S[A]$  als vierten harmonischen Punkt:  $\mathcal{D}[A, S[A], M, P[s]] = -1$ . Dazu wählen wir  $g_0$  durch  $P$  und  $g_1$  durch  $A$  und ziehen nacheinander die Geraden  $g_2, g_3, g_4$  durch die sich ergebenden Schnittpunkte  $O, Q_1, Q_2, Q_3, B$ .

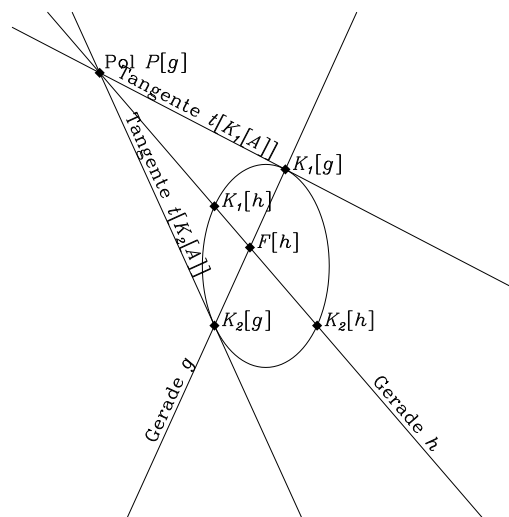


Abbildung 8.14: Der Pol einer Geraden. I.

Der Pol einer Geraden  $g$  ist der Schnittpunkt der Tangenten  $t$ , die in den Punkten  $K[g]$  an den Kegelschnitt gelegt werden, in denen er von der Geraden geschnitten wird.

$$P[g] = t[K_1[g]] \times t[K_2[g]] .$$

Die Schnittpunkte  $K_1[h], K_2[h]$  jeder Geraden  $h$  durch den Pol teilen Pol und Fußpunkt  $F_g[h]$  harmonisch. Das läßt sich zur Definition verwenden, wenn  $g$  den Kegelschnitt nicht schneidet.

jektion verzerrt werden? Da gleiche Winkel und Strecken so konstruiert werden, daß sie gleiches Doppelverhältnis mit den absoluten Punkte oder Strahlen bilden, müssen die entsprechenden Maße Funktionen dieser Doppelverhältnisse sein. Die Kettenregel der Doppelverhältnisse zeigt, wie eine Länge zu bestimmen ist. Da sich Strecken und Winkel addieren (etwa  $d[A, B] = d[A, M] + d[M, B]$ ), die entsprechenden Doppelverhältnisse aber multiplikativ zu verketteten sind (Gleichung (8.4)), ist der Abstand ein Logarithmus des Doppelverhältnisses. Die Basis des Logarithmus bestimmt dann nur die Maßeinheit. Bei dieser Konstruktion können die Punkte  $E$  und  $F$  sogar zusammenfallen. Dann können wir zwar nicht mehr den absoluten Abstand zweier Punkte definieren, wohl aber können wir noch Abstandsverhältnisse bestimmen, also einer Strecke an einer anderen messen (Abschnitt E.2).

Was können wir für die Winkel zwischen den Strahlen eines Büschels erwarten? In der Minkowski-Geometrie sind zwei Geraden jedes Büschels absolut gegeben, die isotropen Richtungen. Das Doppelverhältnis ist bei Projektionen unveränderlich,

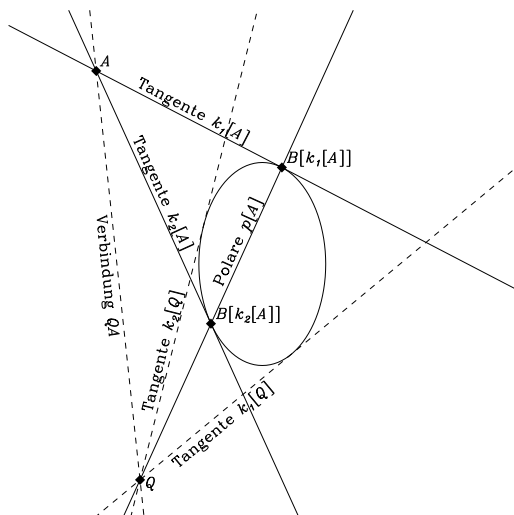


Abbildung 8.15: Die Polare eines Punktes  
Die Polare eines Punktes  $A$  verbindet die Berührungspunkte  $B$  der Tangenten  $k_1[A], k_2[A]$  an den Kegelschnitt, d.h.,

$$p[A] = B[k_1[A]] \times B[k_2[A]] .$$

Die Tangenten  $k_1[Q], k_2[Q]$  jedes Punktes  $Q$  auf der Polaren teilen die Polare und die Verbindung  $QA$  harmonisch. Das läßt sich zur Definition verwenden, wenn  $A$  im Kegelschnitt liegt.

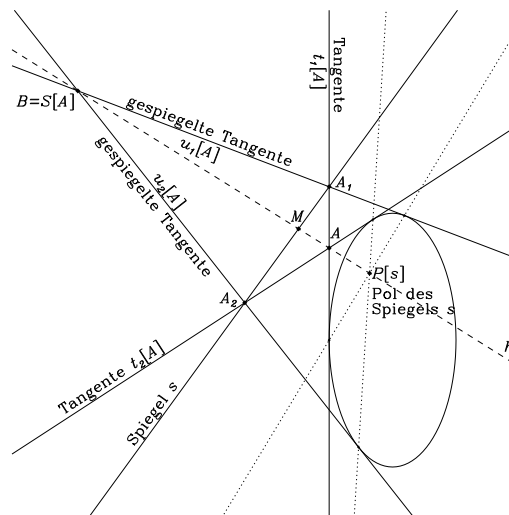


Abbildung 8.16: Spiegelung an einer Geraden. II.

Ist ein absoluter Kegelschnitt gegeben, dann wird sein Tangentenbündel auf sich selbst abgebildet. Wenn wir das Spiegelbild eines Punktes  $A$  suchen, ziehen wir zunächst die Tangenten aus  $A$  an den Kegelschnitt. Aus den Schnittpunkten  $A_1$  und  $A_2$  mit der spiegelnden Geraden ziehen wir deren Spiegelbilder ebenfalls als Tangenten an den Kegelschnitt, sie sich nun in  $S[A]$  schneiden müssen. Der Pol von  $s$  ist der Schnittpunkt der Polaren zu  $A_1$  und  $A_2$  (gepunktete Linien). Auf der Linie  $AB$  erhalten wir die bereits in Abb. 8.10 konstruierte Lage.

und bei den Bewegungen der Minkowski-Geometrie bleiben auch die isotropen Geraden immer isotrop. Deshalb werden Winkel durch das Doppelverhältnis gegeben, die ihre Schenkel mit diesen beiden Geraden bilden. – Wir sehen einen Unterschied zwischen Längen- und Winkelvergleich: Auf der Geraden ist zunächst *ein* invariantes Element gegeben, und wir können Längen zwar vergleichen, haben aber *kein* absolutes Maß. Im Strahlbüschel sind *zwei* invariante Elemente gegeben, und wir haben ein *absolutes* Maß für die Winkel. Das Letztere ist das Allgemeine, und das Zusammenfallen der absoluten Elemente ist ein Sonderfall, eine Entartung. Lassen wir in einem Strahlbüschel die beiden isotropen Geraden zusammenfallen, wird das Doppelverhältnis unbestimmt. Dann kürzt sich wieder nur aus dem *Verhältnis* zweier Doppelverhältnisse diese Unbestimmtheit heraus. Wir können dann Winkel immer noch vergleichen, auch wenn es unter solchen Umständen kein absolutes Winkelmaß mehr gibt. Dies ist gerade bei der Galilei-Geometrie der Fall.

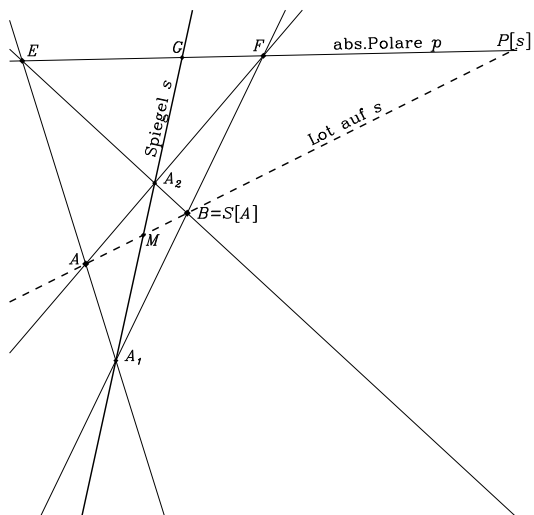


Abbildung 8.17: Spiegelung an einer Geraden. III.

Gilt das Parallelenaxiom, ist der absolute Kegelschnitt zur absoluten Polaren entartet. Es gibt zwei absolute Geradenbüschel, die bei einer Spiegelung aufeinander abgebildet werden. Dadurch ist die Spiegelung wieder bestimmt. Wir konstruieren das Spiegelbild eines Punktes  $A$ . Wir suchen zuerst die Geraden beider Büschel durch den Punkt  $A$ . Sie werden in Geraden des jeweils anderen Büschels abgebildet, welche ihrerseits die spiegelnde Gerade in den gleichen Punkten schneiden. Ihr Schnittpunkt ist dann das Bild  $S[A]$ .

Das Viereck  $AA_1S[A]A_2$  ist das perspektive Bild des Lichtecks  $AA_1S[A]A_2$  in Abb. 5.1.

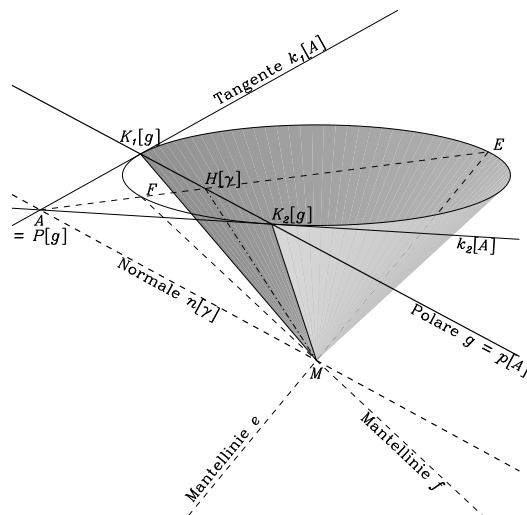


Abbildung 8.18: Polarität und Senkrechtstehen

Wir zeichnen in der  $(2+1)$ -dimensionalen Welt die Zeichenebene als ebenen Schnitt durch den Lichtkegel. Zu einer Geraden  $g$  in dieser Ebene gehört eine Ebene  $\gamma$  in der Welt, die durch den Kegelträger geht. Die Normale  $n[\gamma]$  konstruieren wir mit Hilfe der Lichtecke, die uns in der Minkowski-Welt zur Verfügung stehen. Sie schneidet die Zeichenebene im Pol  $P[g]$  der Geraden. Nun trägt die Normale  $n[\gamma]$  alle Ebenen der Welt, die auf der Ebene  $\gamma$  senkrecht stehen. Deren Schnitte mit der Zeichenebene sind die Geraden, die durch den Pol  $P[g]$  gehen. Es ist also auch aus dieser Sicht natürlich, den Pol  $P[g]$  als den Träger aller Geraden zu sehen, die auf der Bezugsgeraden  $g$  senkrecht stehen.

Abbildung 8.10 hat die Spiegelung auf einer einzelnen Geraden bereits definiert. Punkt  $B$  ist das Spiegelbild von  $A$  an  $M$ , wenn  $E$  und  $F$  als absolute Punkte gegeben sind.  $E$  und  $F$  sind genau die Punkte, die bei den Spiegelungen an allen Punkten  $M$  ineinander gespiegelt werden, so wie die isotropen Richtungen der Minkowski-Welt immer ineinander gespiegelt werden und mit dieser Eigenschaft die Isotropie der Lichtausbreitung abbilden. – Die beiden Punkte  $E$  und  $F$  können nicht nur zusammenfallen, sie können auch imaginär sein. Die reelle Eigenschaft, die wir zur Konstruktion brauchen, ist die Vermittlung der Zuordnung des Pols  $P[M]$  zu den Punkten  $M$  der Geraden. Diese Zuordnung ist eine *Involution* und heißt *Polarität*. Involutionen projektive Abbildungen haben zwei Fixpunkte, die reell sein können,

Wir zeichnen zunächst eine Gerade  $g$  und ihren Pol  $P[g]$ . Damit ist die Spiegelung an  $g$  definiert. Diese Spiegelung in der Ebene induziert Spiegelungen auf jeder Geraden  $h_i$  durch  $P[g]$ . Das Lot in den Schnittpunkten  $M_k$  muß dabei immer  $g$  selbst sein, denn  $g$  bleibt bei diesen Geradenspiegelungen um  $M_k$  immer unverändert. Die Träger der Lote auf den Geraden  $h_k$ , d.h. die Pole  $P[h_k]$ , liegen alle auf der Geraden  $g$ :

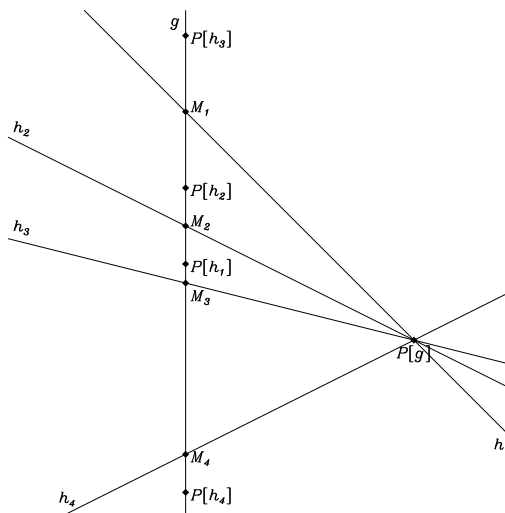
$$\langle h, P[g] \rangle = 0 \rightarrow \langle P[h], g \rangle = 0.$$


Abbildung 8.19: Die Pole eines Strahlbüschels liegen auf einer Geraden

wie  $E$  und  $F$  in Abb. 8.10, die aber auch imaginär sein können. Die reelle Konstruktion wird dann nur etwas komplizierter. Wir müssen dann eben zwei reelle Punktepaare haben, die ineinander gespiegelt werden, und können damit das Fehlen reeller Fixpunkte kompensieren.

Nun erweitern wir die Ergebnisse auf die Ebene. Hier suchen wir die Spiegelung an einer Geraden. Wir erwarten, daß die spiegelnde Gerade  $s$  senkrecht auf der Verbindung von Punkt und Spiegelpunkt steht. Auf der Verbindungsgeraden haben wir dann die eindimensionale Spiegelung am Schnittpunkt  $M$ , die einen zweiten Fixpunkt  $P$  hat. Wir haben aber eine zweidimensionale Spiegelung an der Geraden  $s$  konstruiert.  $P$  ist der Fixpunkt dieser Spiegelung und trägt deshalb die Verbindungsgeraden aller Punkte  $A$  mit ihren Bildern, d.h., er trägt das Büschel der Lote auf dem Spiegel  $s$ . Wir nennen ihn Pol der Geraden  $s$ . Ist der Pol  $P[s]$  einer Geraden  $s$  gegeben, kann die Spiegelung konstruiert werden (Abb. 8.13). – Die Punkte  $M$  und  $P[M]$  können ihre Rollen tauschen. Die auf der Verbindung  $MP[M]$  senkrecht stehende Spiegelgerade  $s$  trägt damit ihrerseits alle Pole der Geraden, die durch  $P[M]$  gehen. Wir nennen sie deshalb *Polare* des Punktes  $P$ . Die Pole eines Büschels sind kollinear, die Polaren einer geraden Punktreihe konkurrent.

Was für eine Kurve sollten wir erwarten, wenn wir alle absoluten Punktepaare aufzeichnen, die sich für die verschiedenen Geraden ergeben? Die einfachsten Kurven, die von allen Geraden in maximal zwei Punkten geschnitten werden, sind die *Kegelschnitte* (Abb. 8.6 und C.6). Es ist der Satz vom Schnitt der Höhen eines Dreiecks, der erzwingt, daß die gesuchte Kurve ein Kegelschnitt sein muß. – Zunächst überlegen wir uns, daß die Pole der verschiedenen Geraden nicht frei gewählt werden können. Der Höhensatz liefert bereits eine Bedingung für die Pole dreier verschiedener Geraden (Abb. D.1). Haben wir aber die Pole dreier nicht konkurrenter Geraden, können wir den Pol jeder anderen mit dem Höhensatz (der jetzt also den

Charakter eines Axioms hat) konstruieren. Man kann zeigen, daß dies eine projektive Zuordnung ist: Die Geraden  $h_k$  durch einen Punkt  $P[g]$  schneiden nämlich aus der Verbindungsgeraden  $g$  ihrer Pole selbst Punkte  $M_k$  heraus. Eine ebene Spiegelung an  $h_k$  wiederum induziert dann eine Spiegelung auf  $g$ , bei der  $M_k$  und  $P[h_k]$  fest bleiben (Abb. 8.19). Die Paare  $[M_k, P[h_k]]$  bilden also selbst die polare Involution auf der Geraden  $g$ , die wir bereits als projektive Abbildung identifiziert haben. Folglich ist die Abbildung  $h_k \rightarrow M_k \rightarrow P[h_k]$  projektiv. – Nun betrachten wir diejenigen Geraden, die ihren eigenen Pol enthalten. Wenn es solche Geraden gibt, bestimmen drei von ihnen einen Kegelschnitt, der sie in den Polen berührt (Abb. C.8). Eine vierte solche Gerade muß Tangente an diesen Kegelschnitt sein. Ihr Pol ist der Berührungspunkt. Wir bezeichnen den Kegelschnitt als *absoluten Kegelschnitt* der Polarität. Er wird bei einer Spiegelung auf sich selbst abgebildet, weil die projektive Eigenschaft einer Geraden, ihren Pol zu enthalten, durch eine projektive Transformation nicht geändert wird. Schneidet eine Gerade  $h$  den absoluten Kegelschnitt, so sind die Schnittpunkte die Fixpunkte der Involution, die den Punkten  $M$  auf  $h$  den Pol  $P[M]$  zuordnet, mit dessen Hilfe die Spiegelung auf der Geraden konstruiert werden kann (Abb. 8.16). Damit ist gezeigt, daß der geometrische Ort der absoluten Punkte der eindimensionalen Spiegelungen ein Kegelschnitt ist.

Es gibt einen wichtigen Satz, daß jeder nichtentartete Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  eine Polarität definiert. Ist ein Kegelschnitt gegeben, dann gibt es zu jeder Geraden  $g$  einen Pol  $P[g]$ . Legen wir durch ihn eine Gerade  $h$ , die den Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  schneidet (und das geschieht im allgemeinen an zwei Stellen  $E_1$  und  $E_2$  wie beim Kreis), dann teilen Pol und Fußpunkt die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt harmonisch (Abb. 8.14). Dual dazu gibt es zu jedem Punkt  $Q$  eine Gerade  $p[Q]$ , seine *Polare*, mit der dualen Eigenschaft. Wählen wir auf  $p[Q]$  einen Punkt  $A$  und ziehen von ihm Tangenten an den Kegelschnitt, so teilen die Polare und die Verbindungsgerade die beiden Tangenten harmonisch (Abb. 8.15). Die Polarität am Kegelschnitt ist eindeutig. Sie liefert somit das gesuchte Verfahren bei der Konstruktion der Spiegelung.

Die Polarität ist eine Beziehung zwischen Punkten und Geraden der Ebene. Entartet der Kegelschnitt, geht die Umkehrbarkeit verloren, es kann gemeinsame Pole für alle Geraden und gemeinsame Polare für alle Punkte geben. – Das Unendliche der Geometrie ist jetzt der absolute Kegelschnitt. Er verallgemeinert und ersetzt den Horizont in dieser Eigenschaft, der seinerseits nun einen entarteten Kegelschnitt darstellt. Mit Hilfe der zugeordneten Polarität definiert der absolute Kegelschnitt auch die Orthogonalität zweier Geraden:

**Zwei Geraden sind lotrecht zueinander, wenn die eine durch den Pol der anderen geht.**

Nun können wir an jeder beliebigen Geraden  $g$  die Spiegelung bestimmen:

**Punkt und Spiegelbild liegen auf einem Lot zur Bezugsgeraden und teilen Pol und Fußpunkt harmonisch.**

Damit ist der letzte Schritt getan und die Spiegelung definiert. – Die gesamte Bewegungsgruppe erhalten wir nun durch sukzessive Anwendung der verschiedenen Spiegelungen. Abbildung 8.17 zeigt den generischen Fall, Abbildung 8.16 die Konstruktion im Fall einer Entartung, etwa der Minkowski-Geometrie.

Wir illustrieren das Gefundene mit der Orthogonalität in der dreidimensionalen Minkowski-Welt (Abb. 8.18). Dort können wir zu jeder Ebene  $\gamma$  durch den Mittelpunkt  $M$  genau eine Lotrechte  $n[\gamma]$  nach pseudo-euklidischem Maß errichten. Alle Ebenen, in denen diese Lotrechte liegt, sind dann pseudo-euklidisch lotrecht auf der Ausgangsebene  $\gamma$ . Die Projektion ist nun einfach der Schnitt mit der Zeichenebene. Durch diesen Schnitt bestimmen Ebenen im Raum Geraden und Geraden im Raum Punkte in der Zeichenebene. Umgekehrt gehört zu jeder Geraden der Zeichenebene eine Ebene im Raum, nämlich die, welche die Zeichenebene in der gegebenen Geraden schneidet und gleichzeitig den Mittelpunkt  $M$  geht. Die Ebene  $\gamma$  bestimmt so eine Gerade  $g$ , und die auf  $\gamma$  pseudo-euklidisch senkrecht stehenden Ebenen sollten Geraden in der Zeichenebene bestimmen, die ihrerseits projektiv auf  $g$  senkrecht stehen. Der Schnittpunkt dieser Lote ist der Punkt, der von der Normalen  $n[\gamma]$  in der Zeichenebene markiert wird. Wir finden die bereits bekannte Polarität. Die Zeichenebene schneidet ja den Lichtkegel in einem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$ . Wir können unmittelbar rekonstruieren, daß alle Lote auf eine Gerade  $g$  durch einen Pol  $P[g]$  gehen. Schneidet die Gerade den Kegelschnitt  $\mathcal{K}$ , liegt dieser Punkt außerhalb  $\mathcal{K}$ : Es existieren zwei Tangenten, und diese berühren den Kegelschnitt gerade dort, wo er von der Ausgangsgeraden  $g$  geschnitten wird.

Betrachten wir die Abtragung einer Strecke auf einer Sehne, dann sehen wir, daß der absolute Kegelschnitt das metrisch unendlich Ferne darstellt. In diesem Sinne liegen die Pole zu Geraden, die den Kegelschnitt wirklich schneiden, jenseits des Unendlichen, das durch den Kegelschnitt dargestellt ist. In Abb. 8.18 ist das Innengebiet des absoluten Kegelschnitts die Projektion einer Zeitschale. Die Geometrie der in den Lichtkegel eingebetteten Zeitschalen ist aber auch nicht-euklidisch, wie wir wissen. In einer Geometrie mit Parallelenaxiom liegen dagegen alle Pole auf der Ferngeraden, die als Kegelschnitt entartet ist.

Die entscheidende Vorgabe zur Bestimmung der Spiegelung ist die Auswahl einer Polarität. In dem Moment, wo die Pole aller Geraden und die Polaren aller Punkte in projektiv invariantem Sinne bekannt sind, haben wir keine Freiheit mehr in der Wahl unserer Konstruktionen. Die Polarität definiert auch den absoluten Kegelschnitt. Er erscheint nun als der geometrische Ort aller Punkte, die auf ihrer eigenen Polaren liegen, oder als die Einhüllende aller Geraden, die ihren eigenen Pol enthalten. Die verschiedenen Möglichkeiten, solche Kegelschnitte zu wählen, eröffnen uns die verschiedenen Geometrien der Ebene. Die Polarität und die auf ihr beruhende projektive Spiegelung ist der einende Gesichtspunkt aller dieser Geometrien.