

XIII EINSTEINS

Allgemeine Relativitätstheorie

1 Der rote Faden

Wir haben gesehen, wie sich die Relativitätstheorie als Kind einer Wellengleichung für Licht und generell der Elektrodynamik entwickelt hat. Die LORENTZ-Gruppe als Invarianzgruppe der (inhomogenen) Wellengleichung hat sich als geometrische Eigenschaft von Raum und Zeit auch der Mechanik bemächtigt. Die strukturellen Implikationen der LORENTZ-Gruppe (Spin und Antiteilchen) haben die Relativitätstheorie zur bestgestützten physikalischen Theorie werden lassen. Alle Wechselwirkungen werden nun als Felder beschrieben, die einer Variante der Wellengleichung genügen. Alle diese Felder zeigen deshalb Wellen, deren Quanten gegebenenfalls eine Art Teilchenbild ermöglichen.

Es bleibt noch das Schwerefeld. Es ist so schwach, dass es nur für astronomisch große Objekte wie die Erde selbst wesentlich wird. Es war NEWTON, der das Gesetz, nachdem sich das Sonnensystem richtet, als Formel für das Schwerefeld fand.

$$\text{Beschleunigung eines Planeten} = \frac{\text{Quellstärke des Schwerefeldes}}{\text{Quadrat der Entfernung}} \quad (1)$$

Die drei NEWTONSchen Axiome sind der Rahmen für diese Erkenntnis und erhalten mit dem zweiten implizit das Problem, das die Relativitätstheorie mit der Schwere hat.

Das erste Axiom ist einfach Galileis Feststellung, dass eine Geschwindigkeit sich immer auf externe Objekte beziehen muss und deshalb keine Ursache haben kann. Gibt es keinen äußeren Einfluss, ändern sich die Geschwindigkeiten nicht. Das zweite Axiom ist die Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung, in der nicht nur die Kraft, sondern auch die Masse erklärt werden muss (die als träge Masse auftritt). NEWTON kann diese Doppelaufgabe vermeiden, weil in seinem Gesetz für die Schwerkraft auch eine Masse (als Ladung im Schwerefeld, d.h. schwere Masse) auftritt die mit der trägen Masse gekürzt wird.

$$\text{Träge Masse} * \text{Beschleunigung} = \frac{\text{Schwere Masse} * \text{Quellstärke}}{\text{Quadrat der Entfernung}} \quad (2)$$

Die Quellstärke des Schwerefeldes ist auch proportional einer Masse, und für NEWTON waren sie alle gleich, weil er kein anderes Konzept hatte. Mit astronomischen Beobachtungen kann man nur die dritte messen, denn die anderen beiden fallen ja aus der Rechnung heraus. Mit einer Wägung im Schwerefeld der Erde vergleichen wir immer schwere Massen. Die trägen Massen können nur an Hand von Beschleunigungen in anderen Kraftfeldern bestimmt werden, aber es gibt noch keinen Grund, der Proportionalität zur schweren Masse zu misstrauen.

Das dritte NEWTONSche Axiom versteckt in einer Feststellung über die Kraft zwischen zwei Körpern ein Gesetz, das als Summenregel für die Geschwindigkeiten viel allgemeiner gilt: Bei Stößen (oder generell zeitlich begrenzten Wechselwirkungen) ändert sich vielleicht die Summe der Geschwindigkeiten. Wenn man aber die Geschwindigkeiten richtig wichtet (und das Gewicht der Geschwindigkeiten ist gerade die träge Masse), bleibt ihre Bilanz unverändert. Die so gewichtete Geschwindigkeit nennt man Impuls, und das Gesetz heisst

Impulserhaltungssatz. Wenn die trägen Massen direkt gemessen werden sollen, müssen sie mit diesem Erhaltungssatz ballistisch verglichen werden. Diese träge Masse ist es, die in EINSTEINS berühmter Formel gemeint ist. Bleibt der Impuls bei fehlender äußerer Einwirkung erhalten, sollte die äußere Einwirkung, die Kraft, eine Impulsänderung bewirken. Statt Masse mal Beschleunigung muss Änderung des Impulses geschrieben werden. Das fällt im Sonnensystem nicht auf, da die Massen sich nicht als veränderlich zeigen.

In NEWTONS Gesetz kann man schwere und träge Masse kürzen.

Wenn keine anderen Hindernisse einwirken,
erfahren alle Körper im Schwerfeld die gleiche Beschleunigung.

(Alle Körper fallen gleich schnell, sagt man lax, und nennt das Äquivalenz von träger und schwerer Masse.) Das bedeutet folglich, dass die Energie des elektromagnetischen Feldes, die Energie des Lichts, die nun eine träge Masse hat, auch eine entsprechende schwere Masse haben muss: Licht fällt auch im Schwerfeld. Wenn wir gleich losrechnen, kommen wir bereits ohne ausgearbeitete Theorie auf eine Lichtablenkung am Sonnenrand. Mit NEWTONS Vorstellung vom Schwerfeld können wir sie zu 0.89 arcsec errechnen.

NEWTONS Vorstellung muss nun aber erst noch der Forderung der Relativitätstheorie angepasst werden: Eine Wellengleichung muss auch für die Schwerkraft gefunden werden. Kann man nicht einfach für das NEWTONSche Potential der Schwerkraft die Wellengleichung fordern und ansonsten die SRT ungeändert lassen? Das ist versucht worden, aber auch hier ist das elektromagnetische Feld der Stolperstein. Zur Quelle eines so einfachen Potentials kann das elektromagnetische Feld nichts beitragen, weil der Energie-Impuls-Tensor (Gleichung ??) keine so einfache Komponente hat. Ein Photon könnte dann vielleicht auf das Schwerfeld eines Neutrons reagieren, nicht aber das Neutron auf das des Photons, wenn dieses kein Schwerfeld haben kann. Das so bewährte dritte Newtonsche Axiom wäre verletzt.

Wenn zur Quelle des Schwerfeldes eine tensorielle Komponente gehört, muss das Schwerfeld auch durch einen Tensor dargestellt werden, und die naheliegende Wahl sind die Koeffizienten der Wellengleichung selbst. Die Wellengleichung der SRT hat nur konstante Koeffizienten und kennt deshalb nur geradlinige Ausbreitung. Wegen der Lichtablenkung erfordert die Anpassung an die Relativitätstheorie also ohnehin eine Wellengleichung mit von Ort und Zeit abhängigen Koeffizienten. Das bedeutet nun, dass es keine durch Linearität ausgezeichnete Bezugssysteme mehr gibt. Wir müssen akzeptieren, dass die Raum-Zeit gekrümmt ist.

Nun redet man von Raum-Zeit erst seit der SRT, aber schon die NEWTONSche Theorie lässt sich in einigen Fällen so darstellen. Man lernt das in der geometrischen Optik mit der mechanisch-optischen Analogie, wo die Brechung von Teilchenbahnen an Potentialstufen als Ergebnis der HAMILTONSchen Methode durch eine Art Fermat-Prinzip bestimmt wird, in dem das Potential den Brechungsindex in der Wellengleichung ersetzt:

$$n^2 = \frac{E - V[x]}{E} . \quad (3)$$

Die Teilchenbahnen sind in diesem Zusammenhang Geodäten in einer ortsabhängigen Metrik. Die entsprechende Wellengleichung ist also

$$g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi = 0 \quad \text{mit} \quad g^{oo} = \frac{E - V[x]}{E} , \quad \text{ansonsten} \quad g^{ik} = \eta^{ik} . \quad (4)$$

Auch diese Metrik beschreibt eine gekrümmte Raum-Zeit, ist aber eben zunächst nur für diesen Spezialfall gültig. Die Krümmung ist hier in der Zeit versteckt, der Raum bleibt euklidisch wie gewohnt.

Die Koeffizienten der Wellengleichung stellen die Metrik der Raum-Zeit dar, die RIEMANNsche Raum-Zeit genannt wird. Abgesehen von der Zeit, hat RIEMANN die geometrischen Eigenschaften solcher Räume beschrieben. Wie in der SRT auch, ist der Wellenoperator invariant. Es macht nun keinen Sinn mehr, Koordinatentransformationen durch eine Linearitätsforderung eingeschränken zu wollen, da es Geraden im geübten Sinn nicht mehr gibt. Also bleiben die Koordinaten beliebig wählbar, und die Gleichungen müssen nun so geschrieben werden können, dass sie formstabil gegen beliebige Koordinatentransformationen sind.

Die einfachste Annahme: Das variable Schwerfeld wird vollständig durch diese Koeffizienten, die Metrik bestimmt. Diese Annahme wird durch die Äquivalenz der trägen und schweren Masse nahegelegt. In einem homogenen Feld registrieren wir die Weltlinien als Parabeln (Wurfparabeln). Weil diese nun wegen der Äquivalenz unabhängig von den Massen alle die gleiche Form haben, bilden diese Parabeln eine Familie von Geraden: Zwei dieser Parabeln schneiden sich höchstens einmal, d.h. frei fallende Körper treffen sich höchstens einmal. Bezieht man sich auf irgendeinen dieser Körper (im Volksmund den EINSTEINSchen Fahrstuhl), werden die Parabeln in dessen Koordinaten alle durch lineare Zusammenhänge beschrieben, wie wir das normalerweise gewohnt sind. Im freien Fall (die ISS fällt frei um die Erde) sind wir schwerelos, die Metrik ist alles und das Schwerfeld hat keine darüber hinausgehende Eigenschaften.

Ist die Metrik alles, was zur Beschreibung des Schwerfeldes nötig ist, führt das auf die EINSTEINSche Allgemeine Relativitätstheorie. Wir wollen hier nicht den Formalismus entwickeln und stellen einfach fest, dass die Gleichungen für die Metrik, d.h. das Schwerfeld, nun die EINSTEINSchen Gleichungen werden.

appropriate concomitant tensor of the RIEMANN curvature tensor	\propto	energy-momentum tensor of all matter content	(5)
---	-----------	---	-----

Auch das, was man im zeitunabhängigen Gravitationsfeld den Raum nennen kann, ist nun selbst gekrümmt. Dies verdoppelt die NEWTONsche Schätzung für die Lichtablenkung. Mit dem Nachweis dieser Verdoppelung fand die neue, die EINSTEINSche Gravitationstheorie ihre zweite Stütze.

Die erste Stütze war die Erklärung eines kleinen Beitrags zur Drehung des Perihels der Merkurbahn (43 arcsec/Jhdt von etwa 5000 insgesamt), der in der NEWTONschen Beschreibung des Sonnensystem nicht gefunden wurde. Bis dahin konnten alle Abweichungen der Planetenbahnen von den errechneten durch Störungen erklärt werden, die die anderen Planeten verursachen. Das herausragende Beispiel dafür ist die Berechnung der Bahn des damals noch unbeobachteten Planeten Neptun aus den Abweichungen der Bahn des Uranus von der erwarteten. Man war schon dabei, einen weiteren Planeten innerhalb der Merkurbahn als Verantwortlichen für den Fehlbetrag in der Periheldrehung zu benennen (Vulkan sollte er heißen) und zu finden. Aber mit der ART ist diese dunkle Materie aus dem Spiel. Es war eben die Theorie, die geändert werden musste.

Die Gravitationwellen, nach denen aktuell gesucht wird, sind dagegen bereits eine Folge der SRT: Ein Feld, das einer Art Wellengleichung genügen soll, muss eben auch Wellen zulassen. Die Frage ist nur, ob sie messbare Intensität erlangen können. Mit der Registrierung

erwarteter Signale ist sie nun affirmativ beantwortet.

Schließlich ist die Allgemeine Relativitätstheorie die erste, die konsistente Modelle eines im Großen homogenen und unbegrenzten Universums beschreiben kann. EINSTEIN hatte zunächst ein statisches Modell mit unbegrenztem, aber endlichem Raum positiver Krümmung wie die einer Kugelfläche im Sinn. Er musste dazu aber zulassen, dass die Raum-Zeit eine inhaltsunabhängige Grundkrümmung (die kosmologische Konstante) hatte. FRIEDMANN überzeugte ihn, dass die Konsistenz auch mit Räumen anderer Krümmung und sogar ohne die Grundkrümmung konstruierbar war, wenn man nur eine zeitliche Entwicklung (die Expansion des Universums) akzeptiert. Die EINSTEINSchen Gleichungen reduzieren sich für das Modell zu den FRIEDMANNschen Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Krümmung} & & \text{Krümmung} & & \text{Grundkrümmung} & & \text{Dichte} \\ \text{der Raum-Zeit} & + & \text{des Raums} & = & \text{der Raum-Zeit} & + & \text{der Materie} \end{array} \quad (6)$$

Diese sind seitdem der Ausgangspunkt aller Versuche, die Struktur und Eigenschaften des beobachtbaren Teils des Universums als Struktur und Eigenschaften eines im Großen homogenen Universums zu verstehen.

2 Koordinaten und Bezugssysteme

Ereignisse werden immer noch durch Koordinaten charakterisiert, diese bieten aber kein Bezugssystem für die Anwendung der SRT mehr: die Koordinatenlinien können ja im allgemeinen keine Geraden sein. Lineare Transformationen sind nichts besonderes mehr. Die Koordinaten sind beliebig vertauschbar. Das physikalische Situation, die von der jeweiligen Metrik beschrieben wird, kann nicht mehr an der Bedeutung der Koordinaten festgemacht werden. Vielmehr muss sich die Bedeutung der Koordinaten aus der physikalischen Situation ergeben. Das soll an zwei elementaren Beispielen dargestellt werden.

Das erste Beispiel ist das (äußere) Feld einer kugelsymmetrischen Massenverteilung, die SCHWARZSCHILD-Lösung. SCHWARZSCHILD schrieb sie in der Form

$$ds^2 = (1 - \alpha/R)dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2), \quad R = \sqrt[3]{r^3 + \alpha^3} \quad (7)$$

Die Kugelsymmetrie springt ins Auge, die Flächen $R = \text{const}$ haben die Metrik von Kugelflächen, SCHWARZSCHILD hat die Ersetzung $R = \sqrt[3]{r^3 + \alpha^3}$ hinzugefügt, um einen Radius $r = 0$ für den Platz des felderzeugenden Massenpunkts zu haben, aber was ein Punkt ist, wird nicht so einfach festzustellen sein. Wollen wir den Radius einer Kugelfläche an ihrer Oberfläche bestimmen, dann ist R die „richtige“ Radialkoordinate, und der „Punkt“ $r = 0$ hat eine Oberfläche von $O = 4\pi\alpha^2$.

$$r_{\text{surface}}[R] = R. \quad (8)$$

Was ist aber die physikalische Länge des Radius? Dazu rechnen wir etwa das Integral

$$r_{\text{distance}}[R] = \int_{\alpha}^R \frac{dx}{\sqrt{1 - \alpha/x}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(\text{Arch}[\sqrt{\frac{R}{\alpha}}] + \sqrt{\frac{R}{\alpha}} \sqrt{\frac{R}{\alpha} - 1} \right). \quad (9)$$

Wieviel Zeit braucht ein Lichtsignal von der Kugelfläche bis zu $R = \alpha$? Das Integral

$$T = \int_{\alpha}^R \frac{dt}{dR} dR \text{ divergiert, weil } ds = 0, \text{ also } \frac{dt}{dR} = \frac{1}{1 - \alpha/R} \quad (10)$$

Die Entfernung von der Fläche $R = \alpha$ ist für das Licht immer unendlich. Von der Fläche $R = \alpha$ kann man nichts sehen, weil es kein Signal, kein Teilchen jemals zu einem äußeren Beobachter schafft. Diese Fläche ist ein Schwarzes Loch. Im Übrigen ist es vermutlich wirklich schwarz, weil es gute Gründe gibt anzunehmen, dass sein direkte Umgebung Quelle schwarzer Strahlung ist.

Man kann ebenfalls die Kraft im SCHWARZSCHILD-Feld mit dem NEWTONSCHEN Gesetz $K \propto r^{-2}$ vergleichen. Dazu muss man sich eine Rakete vorstellen, die ihren Schub so regelt, dass sie an einem festen Platz bleibt, so wie es ein Hubschrauber beim Abseilen schafft. An diesem Schub kann man die Kraft des Schwerefeldes ablesen, die durch ihn kompensiert wird. Dann findet man

$$r_{\text{Newton}}[R] = \sqrt[4]{R^3(R - \alpha)}. \quad (11)$$

Diese Kraft wird an der Oberfläche $R = \alpha$ unendlich.

Zieht man das dritte KEPLERSche zu Rate, nach dem das Quadrat der Umlaufzeit die dritte Potenz des Bahnradius indiziert, ergibt wie nach der Oberfläche

$$r_{\text{Kepler}} = R . \quad (12)$$

Es gibt also viele Möglichkeiten, eine Radialkoordinate zu wählen. Es zählen nur die tatsächlich messbaren Größen, und deren Verhältnis ist dann immer unabhängig von der Koordinatenwahl. Auf Koordinaten verzichten kann man nicht, wenn man mit arithmetischer Rechnung weiterkommen will. Nur wenn geometrische Strukturen allein von Bedeutung sind, kann man gegebenenfalls auf explizite Koordinaten verzichten.

Auch wenn die Koordinaten keinen Anlass mehr geben, an die „spezielle“ Relativitätstheorie anzuschließen (wir sind in der „allgemeinen“ Relativität gefangen), so kann man zu jedem einzelnen Ereignis orthogonale Richtungen wählen, die die Anwendung der SRT auf die momentanen Strukturen und Zusammenhänge erlauben. Die Zusammenhänge zwischen benachbarten Ereignissen, die wir ja benötigen, um Differentialgleichung aufschreiben zu können, sind dann Gegenstand einer Tensoranalysis, die in Lehrbüchern ausführlicher als hier möglich dargestellt wird.

Das zweite Beispiel für diese Problemlage ist die Lösung, die DESITTER gefunden hat.

$$ds^2 = (1 - R^2)dt^2 - \frac{dR^2}{1 - R^2} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \quad (13)$$

In dieser Form ist das eine kugelsymmetrische Metrik. Berühmt wurde sie in anderen Koordinaten. Wir substituieren $t = \tau - \ln\sqrt{1 - R^2}$ und $R = \varrho e^\tau$ und finden

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{2\tau}(d\varrho^2 + \varrho^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)) \quad (14)$$

Das ist mehr als nur eine kugelsymmetrische Metrik, es ist ein expandierender ebener Raum. Der Unterschied liegt in der Wahl der Gleichzeitigkeit im Großen, die Zeit τ ist durch einen ortabhängigen Beitrag verstellt worden. Die Linien festen Ortes $[\varrho, \vartheta, \phi]$ sind nun zeitartige Geodäten mit der Eigenzeit τ deren gegenseitiger Abstand exponentiell ansteigt. Aber es gibt keine Materie, die sich da bewegen kann, das Universum ist leer. Es gibt keine Materie, deren Bewegung etwa diese Geodäten und damit diese gleichzeitigkeit auszeichnet. Deshalb kann man auch noch andere Definitionen der Gleichzeitigkeit finden, in denen die Linien festen Ortes Geodäten sind und einen expandierenden Kosmos beschreiben, nur dann nicht wie e^τ , sondern wie $\cosh[t_c]$ (der Raum ist dann positiv gekrümmt) oder wie $\sinh[t_c]$ (der Raum ist dann negativ gekrümmt). Selbst der Minkowski-Raum der SRT enthält solche expandierenden Geodätenscharen, und er ist dann ein expandierender Raum negativer Krümmung, der linear expandiert ($\propto t$).

Sobald wir im Kosmos eine homogene Materieverteilung akzeptieren, dann zeichnet diese eine Gleichzeitigkeit aus: kosmologisch gleichzeitig sind dann die Ereignisse konstanter mittlerer Dichte. Die SRT bleibt unberührt im Kleinen, aber im Großen beziehen wir uns dann auf den materielle Inhalt des Kosmos. Deshalb ist es auch möglich, unsere Geschwindigkeit gegen diesen Hintergrund zu bestimmen: es sind etwa 500 km/h.